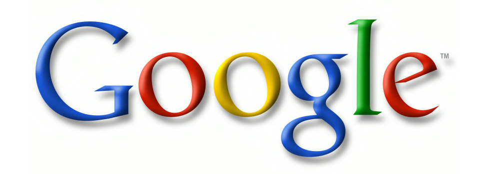
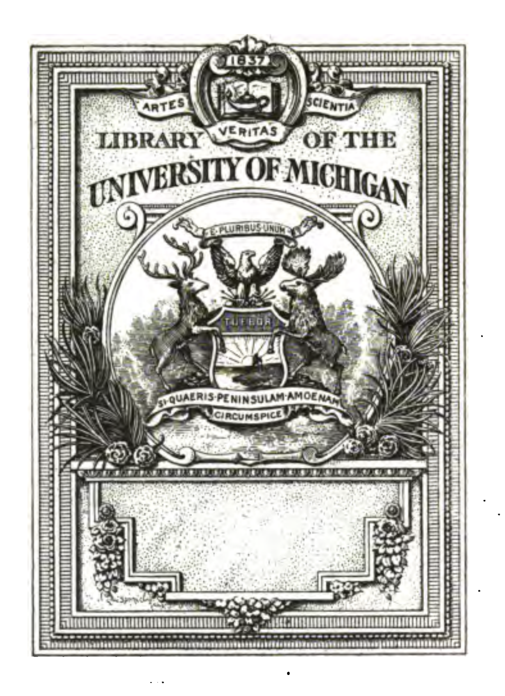
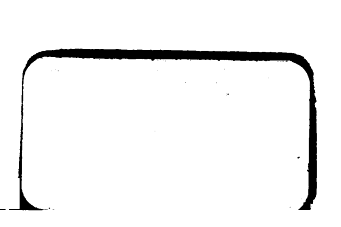



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



TRAITÉ

D'ANALYSE

15932 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Le calcul de Leibnitz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathématiciens de l'Europe.
>
> DE L'HOSPITAL, *Calcul des infiniment petits.*

TOME VII.

CALCUL INTÉGRAL.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

TRAITÉ

D'ANALYSE.

CALCUL INTÉGRAL.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES COURBES QUE L'ON PEUT TRACER SUR UNE SURFACE DONNÉE.

I. — De l'indicatrice.

Nous avons appelé *indicatrice* en un point M d'une surface la courbe semblable à la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent en M, mené à une distance infiniment petite de ce plan, le rapport de similitude étant de l'ordre de la racine carrée de cette distance.

Cherchons l'équation de l'indicatrice au point M d'une surface dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z. Soit toujours

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

l'équation du plan tangent en M sera

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et l'équation d'un plan parallèle infiniment voisin

$$(1) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y) + h.$$

L'équation de la surface peut, en vertu de la formule de Taylor, se mettre sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}[r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2] + \ldots, \end{aligned} \right.$$

Son intersection par le plan (1) aura pour projection sur le plan des x, y une courbe représentée par l'équation

$$h = \tfrac{1}{2}[(X - x)^2 r + 2(X - x)(Y - y)s + (Y - y)^2 t] + \ldots;$$

si l'on remplace $\frac{X - x}{\sqrt{2h}}$ par ξ, $\frac{Y - y}{\sqrt{2h}}$ par η et si l'on fait tendre h vers zéro, on aura

$$1 = r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2:$$

c'est l'équation de la projection de l'indicatrice, supposée placée dans le plan tangent en M. On suppose ordinairement le centre de l'indicatrice placé au point M; les équations de cette courbe sont alors

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y), \\ 1 &= r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2, \end{aligned} \right.$$

et la première n'est autre que celle du plan tangent en M.

Remarque I. — *La section d'une surface par son plan tangent présente un nœud au point de contact, les tangentes au nœud sont les asymptotes de l'indicatrice.*

En effet, si l'on coupe la surface (2) par son plan tangent en x, y, z dont l'équation est la première équation (3), on trouve, pour l'équation de la projection de l'intersection,

$$0 = \tfrac{1}{2}[r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2] + \ldots:$$

le point (x, y) de cette courbe est un nœud, dont les tangentes sont précisément représentées par le terme de degré le moins élevé égalé à o, à savoir par l'équation

$$r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = 0.$$

C'est l'équation des asymptotes de l'indicatrice (3).

Remarque II. — L'indicatrice est, comme on l'a déjà dit, une conique, du moins quand r, s, t ne sont pas nuls à la fois. Si r, s, t sont nuls, en construisant une courbe semblable à la section parallèle au plan tangent, on peut encore, en choisissant convenablement le rapport de similitude, obtenir une courbe de dimensions finies, en général du troisième degré, que nous appellerons encore pour le moment *indicatrice*. Le plan tangent coupe alors la surface suivant une courbe à nœud, dont les tangentes sont encore les asymptotes de l'indicatrice du troisième degré ou de degré supérieur dont il vient d'être question.

La démonstration de ce fait est en tout point semblable à celle que nous venons de faire.

Pour terminer ces notions sur l'indicatrice, nous ferons encore observer que, si une surface est donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, z) = 0$$

et que l'on fasse

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{12}, \quad \ldots,$$

les équations de l'indicatrice en x, y, z seront

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & f_1(X-x) + f_2(Y-y) + f_3(Z-z) = 0, \\ & f_{11}(X-x)^2 + f_{22}(Y-y)^2 + f_{33}(Z-z)^2 + 2(Y-y)(Z-z)f_{23} \\ & \qquad + 2(Z-z)(X-x)f_{13} + 2(X-x)(Y-y)f_{12} = 1; \end{aligned}\right.$$

la première d'ailleurs n'est autre que celle du plan tangent. En effet, l'équation $f(X, Y, Z) = 0$ de la surface peut s'écrire,

l'équation du plan tangent en M sera

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et l'équation d'un plan parallèle infiniment voisin

$$(1)\qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y) + h.$$

L'équation de la surface peut, en vertu de la formule de Taylor, se mettre sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \\ \qquad + \tfrac{1}{2}[r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2] + \dots, \end{cases}$$

Son intersection par le plan (1) aura pour projection sur le plan des x, y une courbe représentée par l'équation

$$h = \tfrac{1}{2}[(X - x)^2 r + 2(X - x)(Y - y)s + (Y - y)^2 t] + \dots;$$

si l'on remplace $\frac{X - x}{\sqrt{2h}}$ par ξ, $\frac{Y - y}{\sqrt{2h}}$ par η, et si l'on fait tendre h vers zéro, on aura

$$1 = r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2;$$

c'est l'équation de la projection de l'indicatrice, supposée placée dans le plan tangent en M. On suppose ordinairement le centre de l'indicatrice placé au point M; les équations de cette courbe sont alors

$$(3)\quad \begin{cases} Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \\ 1 = r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2, \end{cases}$$

et la première n'est autre que celle du plan tangent en M.

Remarque I. — *La section d'une surface par son plan tangent présente un nœud au point de contact, les tangentes au nœud sont les asymptotes d[...]atrice.*

En effet, si l'on coupe la surface [...]lan tangent en x, y, z dont l'équation est [...]n (3), on trouve, pour l'équation de la [...]ection,

$$o = \tfrac{1}{2}[r(X - x)^2 - 2s(X - \dots] + \dots$$

t de ρ^2 sera
s nulles; les
a surface en
trices de la
tangentes

me surface
a première
famille en
nt des dia-
de courbes

le courbes
ions d'un
) sur une
ctions sur
me point
r que les
juguées,
à la pro-
se rap-
ohe pré-

réduc-

de α

de z entre cette équation, l'équation de la surface et l'équation

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+p\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+q\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dy=0$$

donne une relation entre x, y, dx et dy, d'où l'on conclut le rapport $\frac{dy}{dx}$; en remplaçant dans (1) $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur, on obtient une équation de la forme

$$G\,\delta x+H\,\delta y=0,$$

qui est celle de la famille conjuguée.

Parmi les réseaux conjugués que l'on peut tracer sur une surface, on distingue :

1° Les *lignes asymptotiques,* tangentes en chacun de leurs points aux asymptotes de l'indicatrice. Leurs équations différentielles s'obtiendront en écrivant que les directions dx, dy et δx, δy coïncident; la formule (1) devient alors

$$(2)\qquad r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0.$$

Telle est l'équation différentielle des asymptotiques; ces courbes ne sont réelles que si l'on a $rt-s^2<0$. Si l'on observe que l'on a

$$d^2z=p\,d^2x+q\,d^2y+r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2,$$

la formule (2) s'écrira

$$-d^2z+p\,d^2x+q\,d^2y=0;$$

elle exprime que la direction d^2x, d^2y, d^2z de la normale principale est perpendiculaire à la direction p, q, -1 de la normale à la surface; donc le plan osculateur est perpendiculaire à la normale à la surface. Ainsi :

Théorème. — *Les asymptotiques sont caractérisées par ce fait, que leur plan osculateur est tangent à la surface.*

2° Les lignes de *courbure* sont des lignes tangentes en chacun de leurs points aux axes de l'indicatrice; ce sont des

lignes conjuguées orthogonales ; on obtiendra leurs équations en écrivant que, non seulement l'équation (1) a lieu, mais encore la suivante

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0$$

ou

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + (p\,\delta x + q\,\delta y)(p\,dx + q\,dy) = 0,$$

c'est-à-dire

$$dx\,\delta x(1+p^2) + dy\,\delta y(1+q^2) + pq(\delta x\,dy + \delta y\,dx) = 0.$$

Si, entre cette équation et (1), on élimine le rapport $\frac{\delta y}{\delta x}$, on trouve l'équation des projections des lignes de courbure sur le plan des xy,

$$\begin{aligned}&-r\,dx\,[(1+q^2)dy + pq\,dx]\\ &\quad + s\,\{dx[(1+p^2)dx + pq\,dy] - dy[(1+q^2)dy + pq\,dx]\}\\ &\qquad\qquad + t\,dy\,[(1+p^2)dx + pq\,dy] = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&dy^2[pqt - (1+q^2)s]\\ &\quad + dx\,dy[(1+p^2)t - (1+q^2)r] - dx^2[pqr - (1+p^2)s] = 0.\end{aligned}$$

On aurait obtenu la même équation en éliminant $\frac{dy}{dx}$: cela se comprend *a priori,* l'équation obtenue devant donner un réseau de courbes.

Les lignes asymptotiques ont évidemment pour bissectrices les lignes de courbure.

III. — Théorèmes de Dupin et de M. Reina sur les lignes conjuguées.

Considérons un plan tangent en x, y, z à une surface quelconque : l'équation de ce plan sera

$$(1)\qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

p et q désignant, conformément à l'usage, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Suppo-

sons que le point de contact (x, y, z) se déplace infiniment peu sur la surface de la quantité dx, dy, dz : le plan tangent se déplacera, et l'équation du plan tangent infiniment voisin pourra être remplacée par la différentielle de (1), à savoir

$$-dz = -p\,dx - q\,dy + (X - x)\,dp + (Y - y)\,dy$$

ou

$$(2) \qquad 0 = (X - x)(r\,dx + s\,dy) + (Y - y)(s\,dx + t\,dy),$$

r, s, t désignant les dérivées secondes de z. Les équations (1) et (2) sont celles de l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins : ce sont les *équations de la génératrice d'une développable circonscrite à la surface suivant l'élément de courbe* dx, dy, dz ; (2) est l'équation de la projection de cette génératrice sur le plan des xy ; les coefficients directeurs de cette projection sont $r\,dx + s\,dy$ et $-(s\,dx + t\,dy)$. Si l'on prend pour plan des xy le plan tangent en x, y, z et pour plan des xz et des yz les sections principales, les coefficients directeurs seront $r\,dx$ et $-t\,dy$, en sorte que la tangente de l'angle que fait la génératrice avec l'axe des x est $-\frac{r\,dx}{t\,dy}$; le produit de cette tangente par $\frac{dy}{dx}$, tangente de l'angle que la direction dx, dy de la tangente à la courbe de contact fait avec l'axe des x, est $-\frac{r}{t}$; donc, l'équation de l'indicatrice étant $rX^2 + tY^2 = 1$, on peut dire que :

Théorème de Dupin. — *Si une développable est circonscrite à une surface, la génératrice qui passe en un point* M *de cette surface est conjuguée de la tangente en* M *à la courbe de contact par rapport à l'indicatrice.*

Il résulte de là que, si l'on circonscrit une suite de développables à une surface, les courbes de contact et les courbes tangentes aux génératrices des développables seront des courbes conjuguées.

Réciproquement, *si l'on considère deux systèmes de*

courbes conjuguées sur une surface; si, tout le long d'une courbe du premier système, on mène des tangentes aux courbes du second système, ces tangentes formeront une développable circonscrite à la surface.

En effet, nous allons prouver que, le long de la courbe du premier système, on peut circonscrire une développable à la surface; cette développable existant, les tangentes aux courbes conjuguées ne pourront être que ses génératrices. Pour prouver cette assertion, nous observerons que les plans tangents, tout le long de la courbe en question, enveloppent une développable qui touche la surface, puisqu'elle a même plan tangent que cette surface au point où elle est touchée par son plan tangent.

Pour que la courbe de contact d'une développable circonscrite à une surface soit l'arête de rebroussement de la développable, il faut que la génératrice de la développable soit sa propre conjuguée; elle doit donc être une asymptote de l'indicatrice; la courbe de contact doit donc elle-même être une ligne asymptotique, et l'on voit d'ailleurs que les tangentes à une ligne asymptotique forment une développable circonscrite à la surface : il est bon d'observer que les tangentes aux asymptotiques ont un contact d'ordre supérieur avec la surface, en sorte que, dans le cas qui nous occupe, la développable circonscrite traversera la surface et sera osculatrice (p. 4).

Il résulte de là que les tangentes à une courbe quelconque tracée sur une surface, bien que tangentes à la surface, engendreront une développable, *coupant* la surface sans la toucher, sorte de paradoxe qui s'explique en observant que le plan passant par deux tangentes consécutives n'est pas nécessairement un plan tangent.

Pour faire une application très simple du théorème de Dupin, considérons une surface quelconque S et une droite D : par cette droite, faisons passer des plans P et circonscrivons à la surface S des cônes C ayant leurs sommets sur la droite D, la courbe J d'intersection de S et P rencontrera la courbe de contact K du cône C et de la surface en un point M et les

tangentes aux courbes J et K en M seront conjuguées. Ainsi les courbes de contact K et les sections planes J sont des familles de courbes conjuguées. Cette remarque a été faite par M. Kœnigs.

Le théorème de Dupin met en évidence ce théorème remarquable :

Un système de courbes conjuguées reste encore conjugué si l'on soumet à une transformation homographique ou par polaires réciproques la surface sur laquelle elles sont tracées.

En effet, considérons une surface S et sur cette surface une série de courbes C; menons en chaque point de l'une des courbes C le plan tangent à la surface : les plans tangents engendreront une développable D dont les génératrices seront conjuguées des tangentes à la courbe C. Si l'on effectue une transformation homographique, à la surface S correspondra une surface S′, aux courbes C correspondront des courbes C′ et aux développables D des développables D′; aux génératrices de D correspondront les génératrices de D′ et, par suite, aux conjuguées de C les conjuguées de C′.

Si, au contraire, on effectue une transformation corrélative, S se changera en une surface S″; aux courbes C correspondront des développables D″ circonscrites à S″; aux développables D correspondront des courbes C″; les génératrices de D″ seront conjuguées des tangentes à C″ et seront les tangentes des courbes conjuguées de C″; donc, etc.

Il résulte de là que, les lignes asymptotiques étant leurs propres conjuguées, une transformation homographique ou une transformation corrélative étant effectuée sur une surface, les asymptotiques de la transformée seront les transformées des asymptotiques de la proposée.

Théorème de M. Reina. — *Soient o et o' deux points infiniment voisins pris sur une surface, la perpendiculaire commune aux normales en o et o' à la surface a une direction conjuguée de celle de l'élément oo'.*

En effet, rapportons la surface à son plan tangent en o pris pour plan des xy, prenons pour autres plans coordonnés les sections principales relatives au point o. La normale au point o', dont nous appellerons les coordonnées x, y, z, aura pour équations

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1},$$

p, q désignant $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, et la direction de la perpendiculaire commune a pour coefficients directeurs $-q, p, o$; mais en appelant $r_0, s_0 = o, t_0$ les dérivées secondes de z pour $x=o$, $y=o$, on a

$$p = r_0 x + \ldots, \qquad q = t_0 y + \ldots,$$

le coefficient angulaire de la plus courte distance est donc $-\frac{r_0 x}{t_0 y}$; ce qui montre bien que la direction de cette plus courte distance est conjuguée de la direction $\frac{y}{x}$ de l'élément oo'. (Académie de Naples, février 1890.)

IV. — Étude particulière des lignes de courbure.

Étant donnée une surface, cherchons sur cette surface le lieu des points tels que les normales à la surface menées par ces points forment une surface développable ou, ce qui revient au même, cherchons le lieu des points tels que les normales à la surface menées par deux points infiniment voisins du lieu se rencontrent (en négligeant les termes infiniment petits d'ordre supérieur).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point du lieu $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$. Les équations de la normale en x, y, z à la surface sont

$$(1)\qquad \begin{cases} X-x+p(Z-z)=o & \text{ou} \quad P=o,\\ Y-y+q(Z-z)=o & \text{ou} \quad Q=o;\end{cases}$$

les équations de la normale au point infiniment voisin $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ du lieu cherché sont

$$P + dP = 0, \qquad Q + dQ = 0$$

et peuvent être remplacées par

$$dP = 0, \qquad dQ = 0$$

ou par

$$(2) \qquad \begin{cases} dx + p\,dz - dp(Z - z) = 0, \\ dy + q\,dz - dq(Z - z) = 0. \end{cases}$$

Pour exprimer que nos deux normales se rencontrent, il faut éliminer X, Y, Z entre (1) et (2) ou $Z - z$ entre (2), ce qui donne

$$(dx + p\,dz)\,dq - (dy + q\,dz)\,dp = 0.$$

En remplaçant dz par $p\,dx + q\,dy$, dp par $r\,dx + s\,dy$ et dq par $s\,dx + t\,dy$, on trouve

$$\begin{aligned} &[(1 + p^2)\,dx + pq\,dy](s\,dx + t\,dy) \\ &\quad - [(1 + q^2)\,dy + pq\,dz](r\,dx + s\,dy) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(3) \quad \begin{cases} dy^2[pqt - s(1 + q^2)] \\ \quad + dx\,dy[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] - dx^2[pqr - s(1 + p^2)] = 0; \end{cases}$$

cette équation est identique avec celle que nous avons trouvée plus haut pour les lignes de courbure, c'est-à-dire pour les lignes tangentes en chacun de leurs points aux axes de l'indicatrice. D'ailleurs, si l'on prend le plan tangent en x, y, z à la surface pour plan des xy, les sections principales pour autres plans de coordonnées, on aura $p = 0$, $q = 0$, $s = 0$; l'équation (3) deviendra

$$dx\,dy(t - r) = 0$$

et se décomposera en $dx = 0$, $dy = 0$; ce qui montre que les lignes dont nous nous occupons sont bien tangentes aux directions principales, c'est-à-dire aux axes de l'indicatrice, pourvu toutefois que $t - r$ ne soit pas nul. Or t et r dans le système d'axes adopté sont les courbures principales au point

considéré et alors, si $r - t = 0$, ce point est un ombilic. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce cas.

De l'analyse précédente il résulte que l'on peut encore définir les lignes de courbure, comme on le fait souvent, en disant que *ce sont des lignes tracées sur la surface et telles que les normales à la surface menées par les points de ces lignes forment des surfaces développables*.

A ce point de vue, si l'on suppose que le point (x, y, z) soit un ombilic, on a (p. 422, t. II)

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq} = \frac{r}{1+p^2},$$

et l'équation (3) des lignes de courbure se réduit à $0 = 0$. On a cru pouvoir en conclure que par tout ombilic il passe une infinité de lignes de courbure, et cela d'autant mieux que, en un ombilic, toutes les directions tracées sur la surface sont des axes de l'indicatrice; mais cette conclusion est erronée, au moins en général. De ce que, en un ombilic, les coefficients de dx^2, dy^2 et $dx\,dy$ dans (3) sont nuls, il faut seulement en conclure que $\frac{dy}{dx}$ y est mal déterminé par l'équation (3), et cela tient à ce que, pour obtenir l'équation (3), on a négligé des infiniment petits, négligeables *en général,* mais non pas dans le cas actuel.

Reprenons donc nos calculs et exprimons que la normale

$$\begin{aligned} X - x + p(Z - z) &= 0 \quad \text{ou} \quad P = 0, \\ Y - y + q(Z - z) &= 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0 \end{aligned}$$

rencontre la normale

$$\begin{aligned} P + \Delta P &= 0, \\ Q + \Delta Q &= 0; \end{aligned}$$

ces deux dernières équations peuvent être remplacées par

$$\Delta P = 0, \qquad \Delta Q = 0$$

ou

$$\begin{aligned} dP + \tfrac{1}{2}\, d^2P + \ldots &= 0, \\ dQ + \tfrac{1}{2}\, d^2Q + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire par

$$dx + p\,dz - (Z - z)dp + \tfrac{1}{2}[2dp\,dz + p\,d^2z - (Z - z)d^2p] = 0,$$

. . . .

ou

$$dx + p\,dz + dp\,dz + \tfrac{1}{2}p\,d^2z - (Z - z)(dp + \tfrac{1}{2}d^2p) = 0,$$
$$dy + q\,dz + dq\,dz + \tfrac{1}{2}q\,d^2z - (Z - z)(dq + \tfrac{1}{2}d^2q) = 0;$$

la condition de rencontre devient alors, en éliminant $Z - z$,

$$(dx + p\,dz + dp\,dz + \tfrac{1}{2}p\,d^2z)(dq + \tfrac{1}{2}d^2q)$$
$$= (dy + q\,dz + dq\,dz + \tfrac{1}{2}q\,d^2z)(dp + \tfrac{1}{2}d^2p).$$

Or, si nous nous plaçons en un ombilic, les termes du deuxième ordre sont nuls [en les conservant seulement, on retrouverait l'équation identique (3)] et, en conservant les termes du troisième ordre, on a

$$\tfrac{1}{2}(dx + p\,dz)d^2q + dq(dp\,dz + \tfrac{1}{2}p\,d^2z)$$
$$= \tfrac{1}{2}(dx + q\,dz)d^2p + dp(dq\,dz + \tfrac{1}{2}q\,d^2z).$$

En remplaçant dz, d^2z, dp, dq, d^2p, d^2q par leurs valeurs en fonction de dx et dy, on obtient une équation du troisième degré en $\frac{dy}{dx}$, ce qui montre qu'en général il ne passe que trois lignes de courbure par un ombilic. Toutefois, cette dernière conclusion peut encore tomber en défaut : l'équation du troisième degré qui donne $\frac{dy}{dx}$ pouvant elle-même devenir illusoire, il faudrait alors prendre un terme de plus dans les développements de ΔP et ΔQ, et ainsi de suite; il est donc tout à fait impossible de dire *a priori* combien il passe de lignes de courbure par un ombilic.

V. — Continuation du même sujet.

Lorsque la surface dont on veut trouver les lignes de courbure est donnée par une équation non résolue de la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

on peut obtenir comme il suit l'équation différentielle de ces lignes, soit

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}, \quad \ldots\ldots\ldots;$$

les équations de la normale en x, y, z à la surface sont

$$\frac{X - x}{f_1} = \frac{Y - y}{f_2} = \frac{Z - z}{f_3};$$

les équations de la normale infiniment voisine sont

$$\frac{X - x - dx}{f_1 + df_1} = \frac{Y - y - dy}{f_2 + df_2} = \frac{Z - z - dz}{f_3 + df_3};$$

en exprimant que ces droites se rencontrent, ou que leur plus courte distance est nulle, on a

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ df_1 & df_2 & df_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'une des équations des lignes de courbure, l'autre est $f = 0$; on peut, si l'on veut, l'écrire

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_{11}\, dx + f_{12} & dy + f_{13}\, dz & \ldots \end{vmatrix} = 0;$$

elle est alors du second degré en dx, dy, dz. Si l'on suppose $f = \varphi(x, y) - z$, elle devient

$$\begin{vmatrix} dx & dy & p\,dx + q\,dy \\ p & q & -1 \\ r\,dx + s\,dy & s\,dx + t\,dy & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et, en développant, on retrouve l'équation (3) du paragraphe précédent

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &dy^2[pqt - s(1 + q^2)] \\ &\quad + dx\,dy[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] - dx^2[pqr - s(1 + p^2)] = 0. \end{aligned} \right.$$

En général, les lignes de courbure forment une famille unique; pour qu'elles forment deux familles distinctes, il est nécessaire qu'en résolvant l'équation précédente par rapport à $\frac{dy}{dx}$ la quantité placée sous le radical soit un carré, c'est-à-dire que l'on ait une certaine relation entre p, q, r, s, t, que nous n'écrirons pas à cause de sa complication et qui est l'équation aux dérivées partielles d'une classe particulière de surfaces.

Annulons le coefficient de dy^2 dans (3); nous aurons l'équation différentielle d'une classe de surfaces ayant un système de lignes de courbure situées dans des plans parallèles et un second système distinct du premier

$$pqt - s(1 + q^2) = 0.$$

Nous rencontrerons cette équation plus loin et nous l'intégrerons.

VI. — Théorème de O. Rodrigues.

Nous appellerons, avec M. Mannheim, *normalie* d'une surface le lieu des normales à cette surface, menées par tous les points d'une ligne tracée sur cette surface. Une *normalie développable* sera alors le lieu des normales à la surface menées par les points d'une ligne de courbure.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en ce point : cette normale fait partie de deux normalies développables. Soient X, Y, Z les coordonnées du point où elle touche l'arête de rebroussement d'une de ces normalies; soit enfin λ la distance des points (x, y, z) et (X, Y, Z). On aura

$$(1) \qquad X = x + \alpha\lambda, \qquad Y = y + \beta\lambda, \qquad Z = z + \gamma\lambda,$$

et le point (X, Y, Z) s'obtiendra en exprimant que la droite représentée par ces équations (1) rencontre la droite infini-

ment voisine dont les équations peuvent être remplacées par les différentielles de celles-ci, à savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} 0 = dx + \alpha\, d\lambda + \lambda\, d\alpha, \\ 0 = dy + \beta\, d\lambda + \lambda\, d\beta, \\ 0 = dz + \gamma\, d\lambda + \lambda\, d\gamma. \end{cases}$$

La condition cherchée s'obtiendra en éliminant X, Y, Z, λ et $d\lambda$ entre (1) et (2) ou en éliminant simplement λ et $d\lambda$ entre les équations (2), ce qui donne

$$dx(\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta) + dy(\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma) + dz(\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha) = 0;$$

cette équation étant supposée satisfaite (et c'est l'équation des lignes de courbure), on déduira de (2), en multipliant par α, β, γ, et en ajoutant, $d\lambda = 0$; ces formules (2) donneront donc

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma} = -\lambda.$$

Ces relations sont dues à Rodrigues. Laissons-les sous la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} dx + \lambda\, d\alpha = 0, \\ dy + \lambda\, d\beta = 0, \\ dz + \lambda\, d\gamma = 0 \end{cases}$$

ou

$$dx + \lambda\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\, dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\, dz\right) = 0,$$

$$dy + \lambda\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}\, dy + \frac{\partial\beta}{\partial z}\, dz\right) = 0,$$

$$dz + \lambda\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\, dy + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\, dz\right) = 0.$$

En éliminant dx, dy, dz, on a

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est en réalité du second degré; le terme indépendant de λ est en effet $\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)}$, nul, puisqu'il existe entre α, β, γ la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Nous allons voir que λ *n'est autre chose qu'un rayon de courbure principal, en sorte que le lieu des arêtes de rebroussement des normalies développables est aussi le lieu des centres de courbure de la surface, et deux normales infiniment voisines d'une ligne de courbure se coupent en un centre de courbure principal.* L'équation (4) sera alors une nouvelle forme de l'équation aux rayons de courbure principaux. Calculons donc λ : à cet effet, écrivons les équations (3) ainsi,

$$(5)\quad dx + \lambda d\frac{f_1}{N} = 0, \qquad dy + \lambda d\frac{f_2}{N} = 0, \qquad dz + \lambda d\frac{f_3}{N} = 0,$$

en désignant par f le premier membre de l'équation de la surface, par $f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{33}$ ses dérivées, et par N le radical $\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$. Ces équations (5) peuvent se mettre sous les formes

$$dx + \frac{\lambda(N df_1 - f_1 dN)}{N^2} = 0, \quad \ldots$$

ou bien

$$dx\frac{N}{\lambda} + df_1 - f_1\frac{dN}{N} = 0, \quad \ldots$$

où enfin

$$\left(\frac{N}{\lambda} + f_{11}\right)dx + f_{12}dy + f_{13}dz - f_1\frac{dN}{N} = 0,$$
$$f_{21}dx + \left(\frac{N}{\lambda} + f_{22}\right)dy + f_{23}dz - f_2\frac{dN}{N} = 0,$$
$$f_{31}dx + f_{32}dy + \left(\frac{N}{\lambda} + f_{33}\right)dz - f_3\frac{dN}{N} = 0,$$

et comme

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0,$$

on déduit de là, en éliminant dx, dy, dz et $\frac{dN}{N}$, l'équation (14) de la page 437 (II[e] Volume), dans laquelle R est remplacé par λ, ce qui montre bien que les valeurs de λ sont les rayons de

courbure principaux de la surface. L'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial(z,x)} = 0.$$

VII. — Lignes de courbure de quelques surfaces.

1° Les lignes de courbure des surfaces développables sont les génératrices et leurs trajectoires orthogonales, parce que, le plan tangent étant le même le long d'une même génératrice, le lieu des normales le long de cette génératrice est un plan; en particulier, les lignes de courbure d'un cône sont ses génératrices, les courbes d'intersection de la surface par des sphères ayant leur centre au sommet du cône. Après le développement d'une surface développable, les lignes de courbure autres que les génératrices deviennent les développantes de la transformée de l'arête de rebroussement.

2° Sur une surface gauche, les génératrices ne sont pas lignes de courbure; car les normales le long d'une génératrice forment, comme on le verra, un paraboloïde hyperbolique, mais ce sont des asymptotiques.

3° Les lignes de courbure des surfaces de révolution sont les méridiens et les parallèles; car les normales à la surface le long de ces lignes forment des plans ou des cônes : on en conclut que les rayons de courbure principaux en un point de la surface sont le rayon de courbure du méridien et la longueur obtenue (en vertu du théorème de Meusnier) en construisant un triangle rectangle ayant pour côté le rayon du parallèle et pour hypoténuse une droite dirigée suivant la normale; ce sera donc la normale au méridien arrêtée à l'axe de la surface.

On peut vérifier ce résultat par l'Analyse. En effet, l'équation des lignes de courbure étant mise sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

si l'on prend l'équation des surfaces de révolution sous la forme

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

on aura

$$p = \varphi' 2x, \qquad q = \varphi' 2y,$$

$$dp = \varphi'' 4x(x\,dx + y\,dy) + 2\varphi'\,dx,$$
$$dq = \varphi'' 4y(x\,dx + y\,dy) + 2\varphi'\,dy,$$

et, par suite, l'équation (1) deviendra

$$\frac{dx + 4x\varphi'^2(x\,dx + y\,dy)}{4x\varphi''(x\,dx + y\,dy) + 2\varphi'\,dx} = \frac{dy + 4y\varphi'^2(x\,dx + y\,dy)}{4y\varphi''(x\,dx + y\,dy) + 2\varphi'\,dy}$$

ou

$$4\varphi''(x\,dx + y\,dy)(y\,dx - x\,dy) + 8\varphi'^3(x\,dx + y\,dy)(x\,dy - y\,dx) = 0;$$

d'où l'on tire

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \text{const.}:$$

c'est l'équation des parallèles. On a ensuite

$$(y\,dx - x\,dy)(\varphi'' - 2\varphi'^3) = 0,$$

c'est-à-dire

$$y\,dx - x\,dy = 0,$$

ou

$$y = x \times \text{const.},$$

ce qui donne les méridiens.

Toutefois, si l'on avait $\varphi'' - 2\varphi'^3 = 0$, il ne faudrait plus en conclure $y\,dx - x\,dy = 0$; mais alors

$$\frac{\varphi''}{2\varphi'^3} = 1$$

ou

$$\frac{1}{\varphi'^2} = -(x^2 + y^2) + c$$

ou

$$\varphi' = \frac{1}{\sqrt{c - (x^2 + y^2)}},$$

c'est-à-dire

$$\varphi = -\sqrt{c - (x^2 + y^2)} = z;$$

on en tire

$$x^2 + y^2 + z^2 = c;$$

c'est l'équation d'une sphère. Sur la sphère et sur le plan, les lignes de courbure sont évidemment indéterminées, car toutes les normales passent par un point fixe ou sont parallèles à une même droite; mais la sphère et le plan ne sont pas les seules surfaces dont les lignes de courbure soient indéterminées.

4° Pour que les lignes de courbure sur une surface soient indéterminées, il faut que les coefficients de dx^2, $dx\,dy$, dy^2 dans l'équation (3) de ces lignes (p. 17) soient nuls, c'est-à-dire il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} pqt - s(1+q^2) &= 0,\\ (1+p^2)t - (1+q^2)r &= 0,\\ pqr - s(1+p^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations se réduisent à deux

$$\frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{r}{1+p^2};$$

nous avons déjà intégré ces équations (t. II, p. 423) : ce sont celles d'une surface dont tous les points sont des ombilics; ces surfaces sont le plan, la sphère et les *développables isotropes* pour lesquelles on a

$$(a) \qquad p^2 + q^2 + 1 = 0.$$

Ces surfaces imaginaires sont développables, puisque p est fonction de q; de plus, leurs génératrices sont des droites isotropes, et, en effet, p, q, -1 sont les coefficients directeurs de la normale ou du plan tangent; le plan tangent voisin a pour coefficients directeurs

$$p + dp, \quad q + dq, \quad 1;$$

la génératrice a donc pour coefficients directeurs

$$-dq, \quad dp, \quad p\,dq - q\,dp;$$

la somme des carrés de ces coefficients est

$$dp^2(1+q^2)+dq^2(1+p^2)-2pq\,dp\,dq$$

ou, en vertu de (a),

$$-p^2dp^2-q^2dq^2-2pq\,dp\,dq=-(p\,dp+q\,dq)^2.$$

Or, en différentiant (a), on a $p\,dp+q\,dq=0$; donc enfin la somme des carrés des coefficients directeurs de la génératrice est nulle : cette génératrice est donc une droite isotrope.

C. Q. F. D.

VIII. — Lignes de courbure de l'ellipsoïde.

La recherche des lignes de courbure est une opération assez pénible : voici comment on peut trouver celles des surfaces du second ordre. L'analyse suivante est de Monge.

Nous mettrons l'équation de la surface sous la forme

$$(a)\qquad ax^2+by^2+cz^2=1;$$

nous aurons alors, pour l'équation des lignes de courbure,

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ ax & by & cz \\ a\,dx & b\,dy & c\,dz \end{vmatrix}=0$$

et, en observant que $\sum ax\,dx=0$, et que $\sum ax^2=1$,

$$\begin{vmatrix} \sum x\,dx & dx & dy \\ 1 & ax & by \\ 0 & a\,dx & b\,dy \end{vmatrix}=0.$$

En développant, on a

$$ab\sum x\,dx(x\,dy-y\,dx)-dx\,dy(b-a)=0;$$

si l'on remplace $z\,dz$ par $-\dfrac{ax\,dx+by\,dy}{c}$, on a enfin

$$ab[x\,dx(c-a)+y\,dy(c-b)](x\,dy-y\,dx)-c(b-a)dx\,dy=0.$$

Si, dans la formule (a), on remplace a, b, c par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, et si l'on fait

$$A = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \qquad B = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

on trouve, pour l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'équation suivante

$$(b) \qquad Axyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0,$$

en désignant par y' la dérivée $\frac{dy}{dx}$. Cette équation est une de celles que l'on intègre en les différentiant : on trouve

$$\begin{aligned} &2Axyy'y'' + (Ay'^2 - 1)(xy' + y) \\ &\quad + y''(x^2 - Ay^2 - B) + y'(2x - 2Ayy') = 0; \end{aligned}$$

en éliminant $x^2 - Ay^2 - B$, on a

$$(Ay'^2 + 1)\left(\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}\right) = 0;$$

supprimant le premier facteur, on a, en intégrant,

$$\frac{y'y}{x} = \text{const.} = k$$

ou

$$y' = \frac{kx}{y}.$$

Si l'on substitue cette valeur de y' dans (b), on a l'équation des lignes de courbure projetées sur le plan des xy, à savoir

$$Ak^2x^2 + (x^2 - Ay^2 - B)k - y^2 = 0$$

ou bien

$$x^2(Ak^2 + k) - y^2(Ak + 1) = Bk.$$

Cette équation représente une série de sections coniques. Monge a discuté avec soin, après avoir donné la méthode précédente, la forme des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

IX. — Interprétation du premier membre de l'équation des lignes de courbure.

Nous avons vu que l'on obtenait l'équation des lignes de courbure en écrivant qu'une normale à la surface rencontrait la normale voisine. Soient donc α, β, γ les cosinus des angles que la normale à la surface en M (x, y, z) fait avec les axes : les équations d'une normale seront

$$X = x + \alpha\lambda, \qquad Y = y + \beta\lambda, \qquad Z = z + \gamma\lambda;$$

$\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ seront les coefficients directeurs de la normale voisine en M′ : ce seront même ses cosinus directeurs, car $(\alpha + d\alpha)^2 + (\beta + d\beta)^2 + (\gamma + d\gamma)^2$ est égal à 1, aux termes du second ordre près, vu que

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0.$$

Les équations de la normale voisine pourront être remplacées par

$$\begin{aligned} 0 &= dx + \alpha\, d\lambda + \lambda\, d\alpha, \\ 0 &= dy + \beta\, d\lambda + \lambda\, d\beta, \\ 0 &= dz + \gamma\, d\lambda + \lambda\, d\gamma; \end{aligned}$$

l'élimination de X, Y, Z, λ, $d\lambda$ donne l'équation des lignes de courbure déjà trouvée

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation a une signification géométrique importante : on peut l'écrire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha + d\alpha & \beta + d\beta & \gamma + d\gamma \end{vmatrix} ds$$

ou bien

$$\sum (\alpha + d\alpha)\left(\beta \frac{dz}{ds} - \gamma \frac{dy}{ds}\right) ds.$$

Or $\beta \frac{dz}{ds} - \gamma \frac{dy}{ds}, \ldots$ sont les cosinus directeurs de la perpendiculaire aux directions α, β, γ et dx, dy, dz; ce sont donc les cosinus directeurs d'une tangente à la surface perpendiculaire à la tangente dx, dy, dz. Le premier membre de notre équation est donc, au facteur $\frac{1}{ds}$ près, le cosinus de l'angle que fait la normale en M' avec une tangente à la surface perpendiculaire à la direction dx, dy, dz. Appelons $d\psi$ le complément de cet angle; $d\psi$ sera alors l'angle que fait le plan normal en M à la courbe dx, dy, dz avec la normale à la surface au point infiniment voisin M'. Le rapport $\frac{d\psi}{ds}$ est ce que l'on appelle la *torsion géodésique* de la courbe; l'équation des lignes de courbure peut donc s'écrire

$$\frac{d\psi}{ds} = 0,$$

et pour ces courbes, la *torsion géodésique* est nulle. Ainsi la *torsion géodésique* M d'une courbe, relativement à une surface sur laquelle elle se trouve tracée, est la limite du rapport $\frac{d\psi}{ds}$, ds désignant l'élément d'arc de cette courbe, et $d\psi$ l'angle que fait la normale à la surface en M avec le plan normal à la surface mené par le point infiniment voisin de M sur la courbe, tangentiellement à cette courbe.

X. — Théorème de Lancret.

Considérons une courbe passant par le point $M(x, y, z)$ d'une surface sur laquelle elle se trouve tracée : soient

a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale à cette courbe;

$d\varepsilon$ et $d\tau$ ses angles de contingence et de torsion;

θ l'angle que le plan osculateur de la courbe fait avec le plan tangent de la surface;

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface.

On a

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \sin\theta,$$
$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \cos\theta;$$

on en tire, en résolvant par rapport à α, β, γ,

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = a'\sin\theta + a''\cos\theta, \\ \beta = b'\sin\theta + b''\cos\theta, \\ \gamma = c'\sin\theta + c''\cos\theta \end{cases}$$

ou, en différentiant et en tenant compte des formules de Frenet,

$$d\alpha = (a'\cos\theta - a''\sin\theta)d\theta - (a''d\tau + a\,d\varepsilon)\sin\theta + a'd\tau\cos\theta,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui peut s'écrire

$$d\alpha = a'\cos\theta(d\theta + d\tau) - a''\sin\theta(d\theta + d\tau) - a\sin\theta\,d\varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Formons la quantité $b\,d\gamma - c\,d\beta$, et nous aurons

$$b\,d\gamma - c\,d\beta = (a''\cos\theta + a'\sin\theta)(d\theta + d\tau),$$

c'est-à-dire, en vertu de (1),

$$b\,d\gamma - c\,d\beta = \alpha(d\theta + d\tau),$$
$$c\,d\alpha - a\,d\gamma = \beta(d\theta + d\tau),$$
$$a\,d\beta - b\,d\alpha = \gamma(d\theta + d\tau);$$

multiplions la première équation par α, la seconde par β, la troisième par γ et ajoutons; dans le premier membre, nous aurons le déterminant que nous avons appelé $d\psi$, et qui, divisé par ds, donne la torsion géodésique; ainsi

$$d\psi = d\theta + d\tau.$$

Cette formule fournit une expression remarquable

$$(2)\qquad \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\tau}{ds}$$

de la torsion géodésique; elle prouve que :

Si une courbe est ligne de courbure d'une surface, on a $d\theta + d\tau = 0$. C'est en cela que consiste le théorème de Lancret.

XI. — Variations de la torsion géodésique.

Reprenons la formule qui fait connaître la torsion géodésique, à savoir

$$d\psi = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix};$$

si l'on prend pour axes la normale à la surface et les tangentes aux lignes de courbure, on a

$$d\psi = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}$$

ou

$$(1) \qquad -\frac{d\psi}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d\beta}{ds} - \frac{d\alpha}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Or, si l'on observe que

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{dp(1+q^2)-pq\,dq}{ds(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, pour le système d'axes choisi,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dp}{ds} = r\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = t\frac{dy}{ds},$$

la formule (1) deviendra

$$\frac{d\psi}{ds} = (r-t)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Soient R et R′ les rayons de courbure principaux de la surface, et φ l'angle que fait l'élément ds avec la section princi-

pale de rayon R : on aura

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\sin 2\varphi;$$

si l'on pose

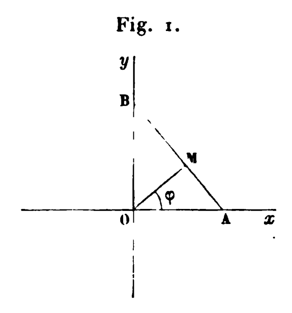
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = a,$$

on aura

$$\frac{d\psi}{ds} = a \sin 2\varphi;$$

la torsion géodésique des lignes tracées sur une surface par

Fig. 1.



un même point varie donc comme le carré du rayon vecteur d'une *lemniscate de Bernoulli* au paramètre a.

Soit AB (*fig.* 1) une droite de longueur $2a$: si l'on suppose que cette droite se meuve de telle sorte que ses extrémités s'appuient sur les tangentes Ox, Oy aux lignes de courbure et si l'on mène OM perpendiculaire à AB, il est facile de voir que

$$\text{OM} = \text{OA}\cos\varphi = \text{AB}\sin\varphi\cos\varphi = a\sin 2\varphi;$$

la ligne OM représentera donc géométriquement la torsion géodésique dans la direction φ.

La forme de la lemniscate est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'insister sur les valeurs remarquables que peut prendre la torsion géodésique. Nous ferons toutefois observer que *deux* lemniscates, en réalité, seront nécessaires pour représenter la torsion géodésique dans chacun des angles droits formés autour de O.

XII. — Conséquences du théorème de Lancret.

Considérons deux surfaces S et S' : soit C leur courbe d'intersection. Soient ds l'élément de la courbe C, $\frac{d\tau}{ds}$ sa torsion au point M, θ l'angle que fait son plan osculateur avec le plan tangent à S, θ' l'angle que fait son plan osculateur avec le plan tangent à S' au même point M; soient enfin $\frac{d\psi}{ds}$ et $\frac{d\psi'}{ds}$ ses torsions géodésiques suivant qu'on la considère comme tracée sur S ou sur S'. Le théorème de Lancret fournit les équations

$$d\psi = d\theta + d\tau,$$
$$d\psi' = d\theta' + d\tau;$$

on a, par suite,

$$d(\psi - \psi') = d(\theta - \theta');$$

mais $\theta - \theta'$ est l'angle V sous lequel se coupent les surfaces en M, on a donc

$$d\psi - d\psi' = dV; \tag{1}$$

donc : *la différentielle de l'angle sous lequel se coupent deux surfaces est égale, au facteur ds près, à la différence des torsions géodésiques de leur intersection.*

Corollaire I. — Supposons que les surfaces S, S' se coupent suivant une ligne de courbure de chacune d'elles : $d\psi$ et $d\psi'$ seront nuls; donc $dV = 0$, et V est constant; donc :

Quand deux surfaces se coupent suivant une ligne de courbure de chacune d'elles, elles se coupent sous un angle constant.

Corollaire II. — *Si deux surfaces se coupent sous un angle constant V et si l'intersection est une ligne de courbure de l'une, elle sera une ligne de courbure de l'autre.*

En effet, si dans la formule (1) on fait $V = \text{const.}$, ou $dV = 0$ et $d\psi = 0$, on a $d\psi' = 0$.

Corollaire III. — *Si trois familles de surfaces se coupent partout orthogonalement, elles se coupent partout suivant leurs lignes de courbure.*

En effet, soit M un point où se coupent trois surfaces de familles différentes; soient s, s', s'' ces trois surfaces; soient a et a' les torsions géodésiques de l'intersection de s et s' relativement aux surfaces s et s'; b' et b'' les torsions géodésiques de l'intersection de s' et s'' relatives aux surfaces s' et s''; enfin c'' et c les torsions géodésiques de l'intersection de s'' et s relatives à ces surfaces. On aura

$$a - a' = 0, \qquad b' - b'' = 0, \qquad c'' - c = 0;$$

mais, les intersections que nous considérons étant orthogonales, on aura, en vertu du théorème démontré au paragraphe précédent sur la variation de la torsion géodésique,

$$a + c = 0, \qquad a' + b' = 0, \qquad b'' + c'' = 0;$$

d'où l'on conclut $a = a' = b' = b'' = c'' = c = 0$, ce qui prouve bien que s, s', s'' se coupent suivant leurs lignes de courbure. Ces trois propositions sont dues à Dupin.

Corollaire IV. — *Si une ligne de courbure d'une surface* S *est plane ou sphérique, le plan ou la sphère qui contient cette ligne coupe la surface* S *sous un angle constant.*

Car toute ligne tracée sur le plan ou la sphère est une ligne de courbure de ce plan ou de cette sphère. Ce théorème est dû à Joachimsthal.

Corollaire V. — *Si une ligne de courbure* C *d'une surface* S *est plane, l'arête de rebroussement de la normalie*

développable relative à cette ligne de courbure est une hélice.

En effet, soient a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' les cosinus directeurs des directions principales de la courbe C; a_1, b_1, c_1; a'_1, b'_1, c'_1; a''_1, b''_1, c''_1 les cosinus directeurs de l'arête de rebroussement D de la normalie développable en question. La ligne D est une développée de C, de sorte que, si l'on appelle ds, $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{R}$ l'élément d'arc de C, sa torsion et sa courbure, ds_1, $\frac{1}{T_1}$ et $\frac{1}{R_1}$ les quantités analogues relatives à D, on aura (t. II, p. 385 et suiv.)

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} dR = ds_1, & a = a'_1, & b = b'_1, & c = c'_1, \\ \sum aa_1 = 0, & \sum aa'_1 = 1, & \sum aa''_1 = 0, & \\ \sum a'a_1 = \cos\theta, & \sum a'a'_1 = 0, & \sum a'a''_1 = \sin\theta, & \\ \sum a''a_1 = \sin\theta, & \sum a''a'_1 = 0, & \sum a''a'_1 = \cos\theta; & \end{array}\right.$$

θ est alors l'angle que le plan osculateur de C fait avec le plan tangent à la surface. Différentions la formule $\sum aa''_1 = 0$; nous aurons, en vertu des formules de Serret,

$$\sum \frac{a'\,ds}{R} a''_1 + \sum \frac{a'_1\,ds_1}{T_1} a = 0$$

ou, en vertu de (2),

$$(3)\qquad \frac{\sin\theta\,ds}{R} + \frac{ds_1}{T_1} = 0.$$

En différentiant $\sum aa_1 = 0$, on a de même

$$\sum \frac{a'\,ds}{R} a_1 + \sum a \frac{ds}{R_1} a'_1 = 0$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{\cos\theta\, ds}{R} + \frac{ds_1}{R_1} = 0; \tag{4}$$

de (3) et (4) on tire

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{R_1}{T_1};$$

l'angle θ est constant pour une ligne de courbure; on voit donc que le rapport de la courbure à la torsion en chaque point de la courbe D est constant; cette courbe est donc (t. II, p. 406) une hélice tracée sur un cylindre qui n'est pas nécessairement de révolution.

Cette proposition a été démontrée par J.-A. Serret.

Corollaire VI. — La formule de Lancret $d\psi = d\theta + d\tau$ montre que la torsion géodésique d'une courbe C tracée sur une surface S est partout égale à sa torsion ordinaire, quand son plan osculateur fait partout un angle constant avec le plan tangent à la surface S. Parmi les courbes qui sont dans ce cas se trouvent les asymptotiques pour lesquelles $\theta = 0$, et les géodésiques, dont il sera bientôt question, pour lesquelles on a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

XIII. — Sur les lignes de courbure des développables isotropes.

Nous avons vu que les développables isotropes étaient des surfaces dont tous les points étaient des ombilics; les lignes de courbure doivent y être indéterminées; d'ailleurs, toute normale à la surface y rencontre la normale infiniment voisine; donc toute courbe tracée sur la surface est une ligne de courbure (*voir* p. 315, t. II).

De là résulte une conséquence importante, à savoir : *Sur toute surface, on peut déterminer en termes finis l'équation d'une ligne de courbure.*

En effet, si l'on circonscrit à une surface quelconque une développable isotrope, la courbe de contact

$$p^2 + q^2 + 1 = 0$$

sera une ligne de courbure, car la développable circonscrite rencontre la surface sous un angle constant (nul) et suivant une ligne qui est ligne de courbure de la développable; donc elle est aussi ligne de courbure de la surface proposée. Cette remarque peut être utile dans la recherche des lignes de courbure; on sait, en effet, que beaucoup d'équations différentielles deviennent intégrables quand on en connaît une solution particulière.

Sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la ligne de courbure imaginaire qui nous occupe est donnée par la formule

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2 = 0.$$

XIV. — Surfaces dont les lignes de courbure sont planes.

Les premières recherches qui aient été entreprises sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques, sont dues à Monge (*Application de l'Analyse à la Géométrie*), à M. O. Bonnet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* janvier 1853) et à A. Serret (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et *Journal de Liouville,* t. XVIII); M. Lemonnier (Thèse, 1868) a ensuite publié un travail très complet sur cette question. [*Voir* aussi Picart (Thèse).]

Nous nous bornerons ici à chercher les surfaces dont les lignes de courbure sont planes.

D'après le théorème de Lancret, si une ligne de courbure est plane, son plan doit rencontrer la surface sous un angle constant, ainsi que nous l'avons déjà observé (Th. de Joa-

chimsthal); réciproquement, si un plan coupe une surface sous un angle constant, l'intersection sera une ligne de courbure (p. 29).

Soit

$$(1) \qquad ax + by + cz = h$$

l'équation du plan d'une ligne de courbure d'une surface dont les lignes de courbure sont planes; a, b, c, h sont fonctions d'un certain paramètre que j'appellerai λ. Si l'on pose comme d'habitude $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, ..., le plan (1) devant rencontrer la surface sous un angle constant, on devra avoir

$$(2) \qquad ap + bq - c = k\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

k désignant une nouvelle fonction de λ. Si un second système de lignes de courbure se compose de courbes planes

$$(3) \qquad a'x + b'y + c'z = h',$$

on aura de même

$$(4) \qquad a'p + b'q - c' = k'\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

a', b', c', h', k' désignant des fonctions d'un autre paramètre λ'. Ceci posé, appelons dx, dy, dz un déplacement effectué sur la première ligne (1), et δx, δy, δz un déplacement effectué sur la seconde : nous devrons avoir, les deux systèmes de lignes de courbure étant orthogonaux

$$(5) \qquad dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0;$$

d'ailleurs, les équations (1), (3), donnent

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \qquad a'\,\delta x + b'\,\delta y + c'\,\delta z = 0,$$

et l'on a, en outre,

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0, \qquad p\,\delta x + q\,\delta y - \delta z = 0.$$

En éliminant δx, δy, δz, dx, dy, dz entre ces formules, on a

$$(b + cq)(b' + c'q) + (a + cp)(a' + c'p) + (aq - bp)(a'q - b'p) = 0;$$

si l'on ajoute cette équation avec le produit de (2) et (4), on trouve

$$(p^2+q^2+1)(aa'+bb'+cc'-kk')=0,$$

et, en rejetant la solution $p^2+q^2+1=0$, qui fournit une développable isotrope, on trouve

$$(6) \qquad aa'+bb'+cc'-kk'=0$$

ou, en différentiant par rapport à λ,

$$a'\,da+b'\,db+c'\,dc-k'\,dk=0.$$

En éliminant k', on a

$$a'(a\,dk-k\,da)+b'(b\,dk-k\,db)+c'(c\,dk-k\,dc)=0$$

et, par suite,

$$\delta a'\,(a\,dk-k\,da)+\delta b'\,(b\,dk-k\,db)+\delta c'\,(c\,dk-k\,dc)=0,$$
$$\delta^2 a'(a\,dk-k\,da)+\delta^2 b'(b\,dk-k\,db)+\delta^2 c'(c\,dk-k\,dc)=0;$$

on conclut de ces trois dernières équations, ou bien

$$a\,dk-k\,da=0, \qquad b\,dk-k\,db=0, \qquad c\,dk-k\,dc=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{da}{a}=\frac{db}{b}=\frac{dc}{c}=\frac{dk}{k},$$

ou bien

$$\sum \pm a'\,\delta b'\,\delta^2 c'=0.$$

Dans la première hypothèse, on a

$$\alpha a=\beta b=\gamma c=k,$$

α, β, γ désignant des fonctions de λ' ou des constantes; les lignes de courbure $ax+by+cz=h$ sont alors situées dans des plans parallèles, car α, β, γ ne peuvent être que des constantes. Dans la seconde hypothèse $\sum \pm a'\,\delta b'\,\delta^2 c'=0$, on a

$$Aa'+Bb'+Cc'=0$$

(p. 118, t. V), A, B, C désignant des fonctions de λ ou des

constantes. Mais si ces quantités étaient fonctions de λ, en attribuant à λ des valeurs différentes λ_1, λ_2, on aurait

$$A_1 a' + B_1 b' + C_1 c' = 0,$$
$$A_2 a' + B_2 b' + C_2 c' = 0,$$

A_1, B_1, C_1 désignant les valeurs de A, B, C pour $\lambda = \lambda_1$ et A_2, B_2, C_2 leurs valeurs pour $\lambda = \lambda_2$; les rapports $a' : b' : c'$ alors seraient constants, les lignes $a'x + b'y + c'z = h'$ seraient alors situées dans des plans parallèles.

Nous avons donc deux espèces de surfaces ayant leurs lignes de courbure planes :

1° Des surfaces ayant leurs lignes de courbure dans des plans parallèles à une droite fixe;

2° Des surfaces ayant un système ou leurs deux systèmes de lignes de courbure situées dans des plans parallèles.

XV. — Surfaces dont les plans des lignes de courbure de chaque système sont parallèles à deux droites fixes.

Dans le cas où les lignes de courbure sont situées dans des plans parallèles à des droites fixes, il est facile de voir que ces droites sont rectangulaires. Les plans de nos lignes de courbure ont des équations de la forme

$$(a + a_1\mu)x + (b + b_1\mu)y + (c + c_1\mu)z = h + h_1\mu,$$
$$(a' + a'_1\mu')x + (b' + b'_1\mu')y + (c' + c'_1\mu')z = h' + h'_1\mu';$$

or on a vu que

$$(a + a_1\mu)(a' + a'_1\mu') + (b + b_1\mu)(b' + b'_1\mu') + (c + c_1\mu)(c' + c'_1\mu') = kk';$$

μ est fonction de λ seul, μ' fonction de λ' seul, a, a', b, b', c, c', h, h' sont des constantes, k est fonction de λ et k' fonction de λ'. Or on a, en vertu de la dernière équation,

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$aa'_1 + bb'_1 + cc'_1 = 0,$$
$$a_1 a' + b_1 b' + c_1 c' = 0,$$

et, en vertu de l'identité,

$$\begin{aligned}(aa' + bb' + cc')(a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1) \\ - (aa'_1 + bb'_1 + cc'_1)(a_1 a' + b_1 b' + c_1 c') \\ = (bc_1 - cb_1)(b'c'_1 - c'b'_1) \\ + (ca_1 - ac_1)(c'a'_1 - a'c'_1) + (ab_1 - ba_1)(a'b'_1 - b'a'_1);\end{aligned}$$

son second membre est nul, ce qui démontre la proposition avancée.

Prenons alors l'axe des x parallèle à l'une des droites rectangulaires en question, l'axe des y parallèle à l'autre : les équations des lignes de courbure seront

$$(1) \qquad by + cz = h, \qquad a'x + c'z = h';$$

d'ailleurs, d'après les équations (2), (4), (6) du paragraphe précédent,

$$(2) \qquad \begin{cases} bq - c = kN, & a'p - c' = k'N, \\ N = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, & cc' = kk'. \end{cases}$$

Cette dernière équation exige que $\frac{k}{c} = \frac{c'}{k'} = \frac{1}{g}$ soient constants; alors on pourra mettre (1) et (2) sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} y = \lambda z + f(\lambda), \\ q + \lambda = \frac{\lambda}{g} N, \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda' z + f'(\lambda'), \\ p + \lambda' = \lambda' g N. \end{cases}$$

Des équations (3) ou (4), on déduit l'équation aux dérivées partielles de la surface. En éliminant λ et $f(\lambda)$ ou λ' et $f'(\lambda')$, on trouve

$$\begin{aligned} rpq(N - g - gq^2) \\ + s[2g(1 + p^2)(1 + q^2) - Ng^2(1 + q^2) - N(1 + p^2)] \\ + tpqg(Ng - 1 - p^2) = 0; \end{aligned}$$

mais cette équation ne nous sera pas utile. De (3) et (4) nous

déduirons avec Serret

$$p = \frac{(g^2-1)\lambda'\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}}{\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}-g^2\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}},$$

$$q = \frac{(g^2-1)\lambda\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}}{\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}-g^2\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}},$$

$$dx = \lambda' dz + z\,d\lambda' + \frac{\partial f'}{\partial\lambda'}\,d\lambda',$$

$$dy = \lambda\,dz + z\,d\lambda + \frac{\partial f}{\partial\lambda}\,d\lambda.$$

Portant ces valeurs dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on a

$$\begin{aligned} dz\,\frac{1}{g^2-1}&\left[\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}-\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}\right]\\ &+z\left[\frac{\lambda'\,d\lambda'}{\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}}-\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}}\right]\\ &+\frac{\lambda' f'(\lambda')\,d\lambda'}{\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}}+\frac{\lambda f(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}}=0; \end{aligned}$$

cette équation est intégrable et donne

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}-\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}\right]\frac{z}{g^2-1}\\ &\quad+\int\frac{\lambda' f'(\lambda')\,d\lambda'}{\sqrt{1-(g^2-1)\lambda'^2}}+\int\frac{\lambda f(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{g^2+(g^2-1)\lambda^2}}=0. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ et λ' entre cette équation (5) et les premières (3) et (4) fera connaître z en fonction de x et y.

L'analyse précédente est en défaut quand $k=0$: nous allons examiner ce cas.

Si $k=0$, on a ou $c=0$, ou $c'=0$; si l'on suppose $c=0$, $k=0$, (1) et (2) donnent

$$by = h,\qquad bq = 0,$$

donc $q=0$, et $z=f(x)$. Laissons ce cas de côté et supposons $k=0$, $c'=0$; alors on écrit (1) et (2) ainsi

$$\begin{aligned} by + cz &= h, & a'x &= k',\\ bq - c &= 0, & a'p &= k'\mathrm{N} \end{aligned}$$

ou bien

$$y = z\lambda + f(\lambda), \qquad x = f'(\lambda'),$$
$$q + \lambda = 0, \qquad p = \lambda' \mathrm{N}.$$

On voit que l'équation différentielle

$$y = -zq + \mathrm{F}(q)$$

est celle de la surface; cette équation ne contenant pas x peut s'écrire

$$y + z\frac{dz}{dy} - \mathrm{F}\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0;$$

on l'intègre en la différentiant, ce qui donne

$$dy = -z\,dq - q\,dz + \mathrm{F}'(q)\,dq;$$

mais $dy = \frac{1}{q}\,dz$; on a donc

$$(1 + q^2)\,dz = -zq\,dq + q\,\mathrm{F}'(q)\,dq$$

ou

$$\frac{dz}{dq} + \frac{zq}{1+q^2} = \frac{q\,\mathrm{F}'(q)}{1+q^2}$$

ou enfin

$$z = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left[\int \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\,q\,\mathrm{F}'(q)\,dq + \theta(x)\right],$$

θ désignant une fonction arbitraire.

Les équations de la surface sont de la forme

$$y + qz = \mathrm{F}(q),$$
$$z = \varphi(q) + \frac{\theta(x)}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Si enfin on suppose k et k' nuls, on aura $p = 0$, c'est-à-dire $z =$ une fonction de y seul, ou fonction de x seul si $q = 0$. Lorsque l'un des systèmes de lignes de courbure se confond avec les sections principales correspondantes, on est précisément dans le cas où $k = 0$; les sections principales, lignes de courbure, enveloppent une développable D, et les normales à la surface touchent une même développable.

Réciproquement, si les normales à une surface touchent une même développable, les sections normales seront tangentes à cette développable, et ces sections normales seront des lignes de courbure. La surface elle-même peut être engendrée par une courbe tracée sur un plan mobile roulant sans glisser sur une surface développable. Dans les surfaces de révolution, cette développable se réduit à un cylindre évanouissant qui est l'axe de la surface.

XVI. — Surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont situées dans des plans parallèles.

On obtient les équations de ces surfaces en écrivant que les lignes de courbure ont pour l'une de leurs équations $dy = 0$, ou, si l'on veut, leur équation générale est satisfaite pour $dy = 0$; on trouve ainsi

$$pqr - (1 + p^2)s = 0$$

ou bien

$$\frac{pr}{1+p^2} = \frac{s}{q};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\log\sqrt{1+p^2} = \log q + \log f(y),$$

$f(y)$ désignant une fonction arbitraire de y. On a donc

$$\sqrt{1+p^2} = q f(y)$$

ou, en changeant $f^2(y)$ en $F(y)$,

$$(1) \qquad 1 + p^2 - q^2 F(y) = 0.$$

Pour intégrer cette équation, on posera les équations canoniques

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2qF(y)} = -\frac{dp}{0} = \frac{dq}{q^2 F'(y)};$$

on en déduira l'intégrale $p = a$, a désignant une constante;

(1) donnera alors

$$q^2 = \frac{1+a^2}{F(y)},$$

et l'on aura

$$z = \int \left[a\,dx + \sqrt{\frac{1+a^2}{F(y)}}\,dy \right] = ax + \sqrt{1+a^2}\int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}} + b,$$

b désignant une nouvelle constante. Il résulte de là que

$$(2) \qquad z = ax + \sqrt{1+a^2}\,\psi(y) + b$$

est une intégrale complète de (1) quand on suppose

$$\psi(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}};$$

la solution générale de la question qui nous occupe s'obtiendra en éliminant a entre

$$z = ax + \sqrt{1+a^2}\,\psi(y) + \varpi(a), \qquad 1 = x + \frac{a\psi(y)}{\sqrt{1+a^2}} + \varpi'(a);$$

c'est, comme l'on voit, l'enveloppe d'une série de cylindres ayant leurs génératrices parallèles à la droite $z = ax$, parallèle au plan des zx.

On aurait d'ailleurs pu obtenir directement l'équation du premier ordre des surfaces en question, en observant que le plan d'une ligne de courbure devait rencontrer la surface sous un angle constant; donc $\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ est constant avec y, donc

$$\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = F(y)$$

ou

$$(1+p^2+q^2) = \frac{q^2}{F^2(y)};$$

on tire de là

$$\sqrt{1+p^2} = q\sqrt{\frac{1}{F^2} - 1},$$

ce qui revient à l'équation (1).

XVII. — Sur les enveloppes de sphères.

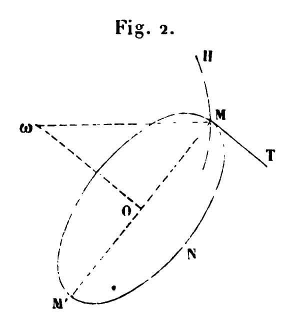
Théorème I. — *Toute enveloppe de sphères a pour lignes de courbure ses caractéristiques et leurs trajectoires orthogonales.*

En effet, toute enveloppe de sphères a pour caractéristique un cercle qui est une ligne de courbure de la sphère enveloppée, et, comme cette sphère enveloppée rencontre l'enveloppe sous un angle constant (nul), la caractéristique est aussi une ligne de courbure de la surface. Le rayon de la sphère enveloppée est évidemment un rayon de courbure principal de l'enveloppe; car le rayon de courbure de la caractéristique doit être, d'après le théorème de Meusnier, la projection du rayon de courbure principal sur le plan de la caractéristique; ce rayon de courbure principal est donc bien le rayon de la sphère enveloppée. Réciproquement :

Théorème II. — *Si un système de lignes de courbure d'une surface se compose de cercles, cette surface est l'enveloppe d'une famille de sphères.*

En effet, soit MNM′ (*fig.* 2) une ligne de courbure circulaire passant en un point M; soit MH l'autre ligne de courbure pas-

Fig. 2.



sant en M; soit Mω la normale à la surface. Si en O on élève une perpendiculaire Oω au plan du cercle MNM′, elle rencon-

trera la normale en M à la surface en ω, qui sera, en vertu du théorème de Meusnier, le centre de courbure de la section normale passant suivant la tangente MT à la ligne de courbure MNM' en M. Si de ω comme centre avec ωM comme rayon, on décrit une sphère, elle contiendra le cercle MNM' qui sera une ligne de courbure de la sphère ; mais la sphère touchera la surface suivant cette ligne de courbure, en M ; comme elle doit la couper sous un angle constant, elle devra aussi la toucher tout le long du cercle MNM' : la surface en question est donc une enveloppe de sphères.

Corollaire I. — *Le lieu des centres des sphères enveloppées est aussi le lieu des centres d'une des courbures principales, qui se réduit alors dans ce cas particulier à une ligne.*

Corollaire II. — *Dans les enveloppes de sphères les normales rencontrent une ligne fixe.*

XVIII. — Surfaces canaux.

Parmi les enveloppes de sphères, on distingue les transformées par rayons vecteurs réciproques des développables dont les propriétés sont des conséquences de celles des développables et celles dans lesquelles le rayon de la sphère enveloppée est constant : ces dernières sont appelées *surfaces canaux*.

Dans une surface canal, un rayon de courbure principal est constant. Réciproquement :

Théorème. — *Toute surface dans laquelle un rayon de courbure est constant est une surface canal.*

En effet, en vertu des formules de O. Rodrigues, on a

$$d\alpha = \frac{dx}{R}, \qquad d\beta = \frac{dy}{R}, \qquad d\gamma = \frac{dz}{R},$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale, R le rayon constant et dx, dy, dz un déplacement effectué le long de la section principale correspondante, ou de la ligne de courbure correspondante; R étant constant, on pourra intégrer, et l'on aura

$$x = R\alpha + a, \qquad y = R\beta + b, \qquad z = R\gamma + c,$$

a, b, c désignant trois constantes ou, plus exactement, trois quantités restant invariables le long de la ligne de courbure considérée; il existe donc deux relations entre ces quantités, et, par suite, on peut écrire

$$x - R\alpha = \varphi(z - R\gamma), \qquad y - R\beta = \psi(z - R\gamma),$$

ce qui prouve que le lieu des centres de courbure est une ligne dont les équations sont précisément

$$a = \varphi(c), \qquad b = \psi(c).$$

Si, du point a, b, c comme centre avec R pour rayon, on décrit une sphère, elle aura pour équation

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2$$

ou bien

$$(X - x - R\alpha)^2 + (Y - y - R\beta)^2 + (Z - z - R\gamma)^2 = R^2;$$

elle passe en x, y, z, et les coefficients directeurs du rayon aboutissant en x, y, z sont α, β, γ. Cette sphère est donc tangente à la surface en x, y, z; or cette sphère passe par tous les points x, y, z pour lesquels a, b, c sont constants, c'est-à-dire qu'elle contient une ligne de courbure et qu'elle est tangente à la surface tout le long de cette ligne. La surface est donc bien une enveloppe de sphères de rayon constant.

Lorsque deux rayons de courbure restent constants, la normale rencontre deux courbes fixes, et les distances de son pied aux points où elle rencontre les courbes fixes doivent rester constantes, ce qui est impossible si les courbes fixes

ne se réduisent pas à un point et si les rayons de courbure ne sont pas égaux. La sphère est donc la seule surface dont deux rayons de courbure principaux restent constants.

XIX. — Sur la cyclide de Dupin.

Avant d'aller plus loin, nous chercherons à résoudre la question suivante, qui va nous être utile :

Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée.

Donnons-nous la conique dans le plan des xy : son équation sera

$$Ax^2 + A'y^2 = 1;$$

la surface du second degré la plus générale passant par cette conique aura pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2C''z = 1.$$

Si elle est de révolution, il faut que B' ou $B = 0$: soit $B' = 0$; alors il faudra encore que $B^2 = (A - A')(A - A'')$, si bien que l'on peut écrire ainsi l'équation des surfaces de révolution passant par la conique

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2C''z = 1, \\ B^2 = (A - A')(A - A''). \end{array} \right.$$

Écrivons que le centre est sur la surface, et cherchons le lieu de ce centre, il faudra poser

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \\ A'y + Bz &= 0, \\ By + A''z + C'' &= 0, \\ C''z - 1 &= 0; \end{aligned}$$

la première de ces équations montre que le lieu est plan et contenu dans le plan des yz. L'élimination de B, A'', C''

entre la seconde équation (1) et les trois dernières donne

$$A'^2y^2 + (A' - A)(Az^2 - A'y^2 + 1) = 0$$

ou

$$AA'y^2 + A(A' - A)z^2 + (A' - A) = 0.$$

Le lieu, comme l'on voit, se compose d'une conique placée dans le plan des yz, et aussi d'une seconde conique placée dans le plan des xz. Les équations de la conique proposée et celles des coniques constituant le lieu peuvent s'écrire

$$(A) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(C) \qquad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2} = -1,$$

$$(B) \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1;$$

le foyer de chaque conique est le sommet d'une autre conique, et l'on voit que le lieu des sommets des cônes de révolution passant par la conique (B) est la conique (A); si l'une est une ellipse, l'autre est une hyperbole. Ces deux coniques sont dites *focales* l'une par rapport à l'autre : voici la raison de cette dénomination.

Cherchons le lieu des points dont les distances à un point de (A) sont fonctions rationnelles des coordonnées de ce point. Il faudra que, en appelant α, β, γ les coordonnées de ces points ou *foyers,* on ait

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \gamma^2 = (lx + my + n)^2,$$

l, m, n désignant des nombres à déterminer; on déduit de l'identification de cette équation avec (A)

$$(1 - l^2)a^2 = (1 - m^2)b^2 = n^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$lm = 0, \qquad \alpha + ln = 0, \qquad \beta + mn = 0.$$

En nous bornant aux solutions réelles, nous avons l'équa-

tion (B); l'équation (C) serait l'autre solution. On trouve aussi

$$lx + my + n = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\, x + \sqrt{b^2 + \alpha^2 + \gamma^2};$$

on voit que la somme des distances d'un point de l'hyperbole focale à deux points diamétralement opposés de l'ellipse est constante; les points de la focale sont donc de véritables foyers dans l'espace. On voit aussi que la somme des distances d'un point de l'ellipse à deux points fixes de l'hyperbole est constante, etc.

Il est évident que le cône de révolution, qui a pour sommet un point de (C) et pour base la conique (A), a son axe dirigé suivant la tangente à l'hyperbole; en effet, cette tangente partage en deux parties égales l'angle des génératrices du cône qui sont dans le plan de l'hyperbole et aboutissent au sommet de l'ellipse qui est le foyer de l'hyperbole.

La *cyclide,* étudiée avec soin par Ch. Dupin, est une surface dont toutes les lignes de courbure sont circulaires.

D'après ce que nous avons vu, les normales rencontreront deux courbes fixes C et C'; en effet, la cyclide sera de deux manières une enveloppe de sphères, et la normale rencontrera les lieux des centres de ces sphères (p. 42). La normale à la cyclide s'appuyant sur une ligne de courbure circulaire passe par un point fixe de la courbe C et longe la courbe C'; cette courbe C' est donc sur un cône du second degré, elle se trouve même sur une infinité de cônes du second degré ayant pour bases les lignes de courbure d'un même système. Cette courbe C' est donc une conique. En effet, par une courbe du quatrième degré proprement dite, on ne peut pas faire passer une infinité de surfaces de révolution et il en est de même de la courbe C.

La courbe C' est le lieu des sommets des cônes de révolution passant par C; donc C et C' sont *focales* l'une de l'autre.

Cherchons la trace de la surface sur les plans des courbes C et C'. Soient T cette trace, M un de ses points : la normale en

M à la surface doit rencontrer C et C′; donc elle rencontre l'une des courbes et passe par le sommet de l'autre qui est un point fixe. La normale à T passe donc par un point fixe; donc enfin T se compose de deux cercles ayant leurs centres aux points qui sont à la fois le foyer d'une des courbes C et le sommet de l'autre.

Mais n'oublions pas que la cyclide est une enveloppe de sphères (p. 42). Les plans des courbes C et C′ doivent être des plans de symétrie : la sphère enveloppante peut être censée avoir son centre en un point ω de C qui sera, si l'on veut, l'hyperbole; son rayon est la ligne ωM qui va de ω en un point M de la surface que l'on peut supposer dans le plan de l'hyperbole; elle touche donc deux sphères ayant pour grands cercles les traces de la surface sur le plan de l'hyperbole. Mais la différence des distances du point a à deux points diamétralement opposés de l'ellipse est constante; donc la sphère enveloppante touche une infinité de sphères fixes; donc :

La cyclide peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères touchant trois sphères fixes,

théorème dû à Dupin et qui peut servir de définition à la cyclide.

Toute cyclide peut être considérée comme la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un tore.

(Mannheim).

En effet, la transformée d'une enveloppe de sphères touchant des sphères est encore une enveloppe de sphères touchant des sphères ou des plans.

Or, parmi les sphères que touche la cyclide, il y en a deux qui sont tangentes, car la condition de contact n'impose qu'une seule condition. Prenons le point de contact pour pôle de la transformation; ces sphères tangentes deviendront deux plans parallèles, et la transformée de la cyclide deviendra

l'enveloppe d'une série de sphères touchant une sphère et deux plans parallèles, c'est-à-dire un tore.

Réciproquement, la transformée d'un tore est évidemment une cyclide, ce qui prouve d'ailleurs l'existence de la cyclide.

XX. — Trajectoires orthogonales d'un plan mobile.

Les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces sont des lignes qui rencontrent les surfaces de la famille à angle droit.

Proposons-nous de trouver les trajectoires orthogonales d'un plan mobile

$$(1) \qquad ax + by + cz - p = 0,$$

a, b, c, p désignant des fonctions d'un paramètre t, telles que a, b, c soient précisément les cosinus directeurs du plan. En appelant dx, dy, dz les composantes de l'élément ds d'une trajectoire orthogonale, les équations différentielles de cette trajectoire seront (1) et les suivantes, dont deux seulement sont distinctes,

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b, \qquad \frac{dz}{ds} = c.$$

Ces équations intégrées feront connaître x, y, z en fonction de t et de deux constantes arbitraires α, β.

Considérons les courbes que l'on obtient en donnant une valeur déterminée à β : si l'on élimine α entre les équations de ces courbes, on obtiendra l'équation d'une surface S à laquelle les plans mobiles seront normaux; plus généralement, on obtiendra une surface S à laquelle les plans mobiles seront normaux en liant entre eux α et β d'une manière quelconque et en les éliminant des équations des trajectoires.

Je dis que la surface S ainsi obtenue a pour lignes de courbure ses intersections avec le plan mobile et les trajectoires orthogonales de ce plan. Et en effet les normales à la surface le long des intersections avec le plan mobile sont dans ce

plan et forment une développable. De là une infinité de moyens de se procurer des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes, et même sphériques, en faisant usage d'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Il y a plus, un raisonnement analogue au précédent prouve que les surfaces lieux des trajectoires orthogonales d'une famille de sphères ont pour lignes de courbure leurs intersections avec les sphères mobiles.

J.-A. Serret, dans les tomes XLI et XLII des *Mémoires de l'Académie des Sciences* et dans les notes du *Calcul différentiel et intégral* de Lacroix, a étudié les surfaces dont les lignes de courbure sont les trajectoires orthogonales de plans ou de sphères mobiles.

XXI. — Étude des lignes asymptotiques.

Nous avons appelé *lignes asymptotiques* d'une surface celles qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux asymptotes de l'indicatrice, et nous avons vu qu'elles avaient pour équation différentielle

$$(1) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Quand l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de l'indicatrice est (p. 3)

$$f_{11}(X-x)^2 + \ldots + 2f_{23}(Y-y)(Z-z) + \ldots = 1;$$

l'équation de ses asymptotes est

$$f_{11}(X-x)^2 + \ldots + 2f_{23}(Y-y)(Z-z) + \ldots = 0;$$

par conséquent, l'équation des asymptotiques s'obtiendra en remplaçant $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ par dx, dy, dz, ce qui donnera

$$f_{11}\,dx^2 + \ldots + 2f_{23}\,dy\,dz + \ldots = 0$$

ou, sous une forme condensée, $d^2f = 0$, en considérant x, y, z comme des variables indépendantes.

Comme on a identiquement

$$d^2z = p\, d^2x + q\, d^2y + \tfrac{1}{2}(r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2),$$

l'équation (1) peut aussi se mettre sous la forme

$$p\, d^2x + q\, d^2y - d^2z = 0,$$

qui exprime que la direction $p, q, -1$, de la normale à la surface, est perpendiculaire à la direction d^2x, d^2y, d^2z de la normale principale à la courbe, donc :

Dans toute asymptotique, le plan osculateur est tangent à la surface, et réciproquement; les asymptotiques peuvent se définir des courbes dont le plan osculateur est tangent à la surface.

Le théorème de Meusnier ne peut pas fournir alors le rayon de courbure d'une asymptotique, et, en effet, le rayon de courbure de la section normale tangente à l'asymptotique est infini, et, pour obtenir le rayon de courbure de l'asymptotique, il faudrait le multiplier par le cosinus d'un angle droit.

Si l'on se souvient (p. 4) que les asymptotes de l'indicatrice coupent la surface en trois points confondus ou ont avec elle un contact du second ordre, on pourra encore énoncer le théorème suivant :

Les tangentes aux lignes asymptotiques ont un contact du second ordre avec la surface.

Il résulte de la définition même des asymptotiques que, si on les projette sur un plan normal à la surface passant par une de leurs tangentes, elles toucheront en projection leur tangente en un point d'inflexion.

La formule de Lancret

$$d\psi = d\theta + d\tau$$

se réduit, pour une ligne asymptotique, à

$$d\psi = d\tau,$$

puisque l'angle θ du plan osculateur et du plan tangent à la surface est toujours nul. On peut donc dire que :

La torsion géodésique d'une ligne asymptotique est égale à sa torsion proprement dite.

Elle est donc donnée par la formule (p. 28)

$$\frac{2}{T} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\sin 2\varphi.$$

Une ligne asymptotique ne saurait être plane à moins d'être droite : cela résulte de la formule

$$d\psi = d\theta + d\tau.$$

Si l'on y suppose $d\tau = 0$, il reste $d\psi = d\theta$; mais la torsion géodésique ne peut être nulle que suivant les sections principales, donc $d\theta$ n'est pas nul; mais θ est l'angle du plan osculateur avec le plan tangent; cet angle doit donc être indéterminé si la courbe est plane, cette courbe doit donc être une ligne droite. *Autrement,* si une asymptotique est plane, son plan doit être tangent à la surface; ce plan tangent doit donc être tangent suivant une ligne qui alors sera singulière, à moins d'être une génératrice rectiligne dont le plan sera alors indéterminé. On verrait de même que l'hélice ne peut pas être, en général, une ligne asymptotique, car, dans la formule $d\psi = d\theta + d\tau$, il faudrait encore supposer $d\theta = 0$, $d\tau = 0$, et l'on ne peut pas avoir sur une surface $d\psi = 0$, si ce n'est le long d'une ligne de courbure.

XXII. — Lignes asymptotiques des surfaces du second ordre.

Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de la surface dont on désire les asymptotiques ;

leur équation est

$$f_{11}\,dx^2 + 2f_{23}\,dy\,dz + \ldots = 0$$

et, dans le cas actuel,

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 = 0.$$

Remplaçons dz par sa valeur tirée de (1) : nous aurons

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,\frac{1}{C}\,\frac{(Ax\,dx + By\,dy)^2}{1 - Ax^2 - By^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$B\,dy^2(1 - Ax^2) + 2ABxy\,dx\,dy + A\,dx^2(1 - By^2) = 0$$

ou

$$(2) \qquad By'^2(1 - Ax^2) + 2ABxyy' + A(1 - By^2) = 0.$$

Différentions : nous aurons

$$By''[(1 - Ax^2)y' + Axy] = 0,$$

d'où l'on tire, en supposant $B \gtrless 0$,

$$y'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad (1 - Ax^2)y' + Axy = 0;$$

$y'' = 0$ donne des droites que l'on obtient en supposant y constant dans l'équation (2); en éliminant y' entre l'autre équation et (2), on a

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0 :$$

c'est l'enveloppe des projections des génératrices.

XXIII. — Des lignes géodésiques.

On appelle *lignes géodésiques* d'une surface celles dont le plan osculateur est sans cesse normal à la surface ou, ce qui revient au même, celles dont la normale principale coïncide avec la normale à la surface. Nous verrons plus loin que l'on peut encore les définir le plus court chemin d'un point à un autre sur cette surface (p. 377, t. V).

D'après cela, en appelant p, q les dérivées partielles du z de la surface, les équations des lignes géodésiques seront, en prenant l'arc pour variable,

$$\frac{d^2x}{p} = \frac{d^2y}{q} = -\frac{d^2z}{1}$$

ou bien encore, en appelant A, B, C les coefficients du plan osculateur,

$$Ap + Bq - C = 0.$$

Nous ne nous arrêterons pas à établir l'identité de ces deux formules; quant à la seconde, on a adjoint l'équation de la surface.

Si l'on suppose la surface donnée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation des lignes géodésiques sera

$$(\alpha) \qquad Af_1 + Bf_2 + Cf_3 = 0,$$

$f_1, f_2, \ldots$ désignant les dérivées de f. On peut lui donner une forme remarquable : si l'on désigne par N le radical $\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$, on a

$$\left(\frac{f_1}{N}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{N}\right)^2 + \left(\frac{f_3}{N}\right)^2 = 1$$

ou, en différentiant,

$$f_1 d\left(\frac{f_1}{N}\right) + f_2 d\left(\frac{f_2}{N}\right) + f_3 d\left(\frac{f_3}{N}\right) = 0.$$

Remplaçons f_1, f_2, f_3 par les quantités d^2x, d^2y, d^2z qui leur sont proportionnelles, quand on prend l'arc s pour variable, ou mieux par leurs expressions $d^2x\,ds - d^2s\,dx$, ... relatives à une variable quelconque; nous aurons

$$\sum (d^2x\,ds - d^2s\,dx)\, d\left(\frac{f_1}{N}\right) = 0$$

ou bien

$$\sum (d^2x\,ds - d^2s\,dx)(N\,df_1 - f_1\,dN) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \mathrm{N}\, ds \sum df_1\, d^2x - \mathrm{N}\, d^2s \sum df_1\, dx \\ & \quad - d\mathrm{N}\, ds \sum f_1\, d^2x + d\mathrm{N}\, d^2s \sum f_1\, dx = 0; \end{aligned}$$

en faisant alors usage des formules

$$\sum f_1\, dx = 0, \qquad \sum (df_1\, dx + f_1\, d^2x) = 0,$$

la précédente devient

$$\mathrm{N}\, ds \sum df_1\, d^2x - \sum df_1\, dx(\mathrm{N}\, d^2s - d\mathrm{N}\, ds) = 0;$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{\sum df_1\, d^2x}{\sum df_1\, dx} - \frac{d^2s}{ds} + \frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = 0.$$

Telle est la forme donnée par Joachimstahl à l'équation des lignes géodésiques, et démontrée par M. O. Bonnet par des considérations purement géométriques.

Pour une surface du second ordre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

on a

$$f_1 = \frac{2x}{a^2}, \qquad df_1\, d^2x = \frac{2\, dx\, d^2x}{a^2}, \qquad df_1\, dx = \frac{2\, dx^2}{a^2};$$

on a donc

$$\sum df_1\, d^2x = \frac{1}{2}\, d \sum df_1\, dx,$$

et l'équation des lignes géodésiques s'écrit

$$\frac{1}{2}\, \frac{d \sum df_1\, dx}{\sum df_1\, dx} - \frac{d^2s}{ds} + \frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\log\sum df_1\,dx - \log ds + \log N = \text{const.};$$

on a ainsi une intégrale première immédiatement.

XXIV. — Propriétés des lignes géodésiques.

Nous avons défini *lignes géodésiques* celles dont le plan osculateur est normal à la surface; d'où ce premier théorème :

Théorème I. — *La normale principale d'une géodésique est normale à la surface sur laquelle elle est tracée.*

Si l'on se reporte alors à la théorie des courbes à double courbure et si l'on se rappelle comment une courbe gauche se projette sur son plan osculateur, et sur les plans qui lui sont perpendiculaires, on pourra énoncer cet autre théorème :

Théorème II. — *La projection d'une ligne géodésique sur le plan tangent à la surface présente une inflexion au point de contact.*

Car le plan tangent passe par la tangente perpendiculairement à la normale principale.

Théorème III. — *Une ligne géodésique est en général un minimum parmi celles qui passent par les deux mêmes points.*

En effet, prenons d'abord deux points M et M' assez rapprochés l'un de l'autre. Soient c la corde MM', s un arc de courbe quelconque tracé sur la surface de M en M', R son rayon de courbure en M; soient s' l'arc de géodésique passant en M et en M', R' son rayon de courbure en M. On a

$$s = c + \frac{c^3}{24R^2} + \ldots,$$

$$s' = c + \frac{c^3}{24R'^2} + \ldots;$$

d'où

$$s - s' = \frac{c^3}{24}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right) + \ldots.$$

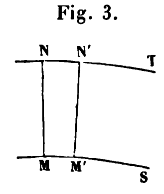
Si les points M et M' sont assez rapprochés, le premier terme du second membre donne son signe à ce membre, et par suite à $s - s'$; si donc on a $s' < s$, on devra avoir $\frac{1}{R'} < \frac{1}{R}$; ainsi :

De toutes les courbes allant de M en M', la plus courte aura en M la plus faible courbure, cette propriété ayant lieu quelque petite que soit la corde c; mais, si une ligne est la plus courte entre deux points A et B, elle doit être la plus courte entre deux quelconques de ses points M et M', suffisamment rapprochés, c'est-à-dire qu'elle doit avoir la plus faible courbure en M, parmi toutes les courbes allant de M en M'. Cette propriété ayant lieu quelque petit que soit MM', on voit que la ligne minima est de toutes les lignes possédant même tangente celle qui a la courbure la plus faible; donc, en vertu du théorème de Meusnier, elle a son plan osculateur normal à la surface.

Cette démonstration prouve que, si une ligne est minima, elle est géodésique; mais elle n'établit que partiellement la réciproque, c'est-à-dire qu'une ligne géodésique n'est minima que pour des points de son parcours suffisamment rapprochés.

Théorème IV. — *Étant donnée une courbe quelconque*

Fig. 3.



MS (*fig.* 3) *tracée sur une surface, on mène les lignes géodésiques* MN, M'N', ..., *normales à* MS, *et l'on prend*

$$MN = M'N' = \ldots.$$

Le lieu des points N, N′, ... *sera normal aux lignes* MN, M′N′, ...

Soient r l'arc de géodésique MN, s l'arc de la courbe NN′, V l'angle de NN′ avec NM : on a

$$\cos V = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Supposons que l'on fasse varier les longueurs, telles que MN : on aura

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \dots;$$

or on a

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial . 1}{\partial s} = 0:$$

on a donc simplement

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}.$$

En remplaçant $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$, ... par leurs valeurs déduites des équations

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} : p = \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} : q = -\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{1}{R\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

qui expriment que la normale principale à la ligne géodésique est la normale à la surface (p, q désignant, comme à l'ordinaire, le $\frac{\partial z}{\partial x}$ et le $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la surface, R est le rayon de courbure de la ligne géodésique), on a

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}p + \frac{\partial y}{\partial s}q - \frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{1}{R\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

La direction p, q, -1 est normale à la direction $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$; donc

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = 0;$$

ainsi l'angle V ne dépend pas de r, on peut donc prendre

$r=0$; alors $\cos V=0$, donc $\cos V$ est toujours nul et, par suite, le théorème est démontré.

Remarque. — Si par un point fixe O on imagine une série de géodésiques de même longueur OM, on obtiendra une courbe que l'on appelle *cercle géodésique*, et dont le point O est le centre, OM le rayon géodésique. *Les rayons géodésiques coupent le cercle sous un angle droit.* Ce théorème peut se déduire du précédent : on peut aussi démontrer que $\frac{\partial \cos V}{\partial r}$ est nul ou que V ne dépend pas de l'orientation de la géodésique OM.

THÉORÈME V. — *Si deux géodésiques se coupent sous un angle infiniment petit* $d\omega$, *et si l'on porte sur chacune d'elles, à partir de leur point* O *d'intersection, des longueurs égales* OM, $OM'=dl$ *infiniment petites, on aura*

$$MM'=dl\,d\omega.$$

En effet, projetons la figure OMM′ sur le plan tangent à la surface en O; soient m et m' les projections de M et M′, Om et Om' ont en O un point d'inflexion.

La différence entre mm' et MM′ est du second ordre par rapport à chacune de ces deux lignes, on peut donc prendre $MM'=mm'$; l'angle $d\omega$ se projette en vraie grandeur, car les tangentes à OM et à OM′ sont dans le plan tangent. Ces tangentes sont aussi tangentes à Om et Om'; mais, comme il y a inflexion en O, les distances de M et m' à leurs tangentes sont du troisième ordre, comme mm' est du second ordre : on peut remplacer les points m et m' par leurs projections sur les tangentes en question, et l'on a alors

$$mm'=MM'=d\omega\,dl.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME VI. — *La torsion géodésique d'une ligne géodésique est égale à sa torsion proprement dite, ce qui justifie la dénomination de torsion géodésique.*

Cela résulte de la formule

$$d\psi = d\theta + d\tau,$$

car $\theta = \frac{\pi}{2}$, $d\theta = 0$ et, par suite, la torsion géodésique est bien égale à $\frac{d\tau}{ds}$, torsion proprement dite de la courbe.

Théorème VII. — *Les torsions des courbes géodésiques qui passent par un même point d'une surface varient donc comme les carrés des rayons vecteurs d'une double lemniscate de Bernoulli.*

Théorème VIII. — *Les courbures des lignes géodésiques qui passent par un même point d'une surface varient comme les courbures des sections normales qui leur sont tangentes et, par suite, comme les carrés des rayons vecteurs de l'indicatrice.*

Puisque, d'après le théorème II, ce sont des lignes de plus petite courbure parmi celles qui sont tangentes à une même droite en un point donné.

Remarque. — La courbure d'une ligne géodésique tangente à une asymptote de l'indicatrice est donc nulle, et, si l'indicatrice est une hyperbole équilatère, les géodésiques tangentes à ses asymptotes auront à la fois une courbure et une torsion nulles.

Les lignes géodésiques donnent lieu à une géométrie sur les surfaces, qui a une grande analogie avec la théorie de la ligne droite en Géométrie plane; nous avons déjà développé quelques-unes de ces analogies : nous nous bornerons à énoncer les propositions suivantes en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

Si l'on appelle *ellipse géodésique* d'une surface le lieu des points tels que la somme des lignes géodésiques menées de ces points à deux points fixes appelés *foyers* soit constante, la tangente à l'ellipse géodésique en un point de cette courbe

partagera en deux parties égales l'angle des géodésiques allant du point de contact aux foyers.

Plus généralement, le théorème de Poinsot sur les tangentes aux courbes planes s'applique encore aux courbes tracées sur les surfaces; mais il faut substituer aux droites qui entrent dans l'énoncé ordinaire de ce théorème des géodésiques.

XXV. — Lignes de niveau et de pente.

Les *lignes de niveau* d'une surface sont les sections parallèles au plan des xy supposé horizontal. Les *lignes de pente* sont les trajectoires orthogonales de celles-ci.

Par exemple, dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

les lignes de niveau ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h,$$

h désignant une constante, et leur équation différentielle est

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0;$$

leurs trajectoires orthogonales ont pour équation

$$\frac{x\,dy}{a^2}-\frac{y\,dx}{b^2}=0$$

ou

$$b^2x\,dy-a^2y\,dx=0;$$

en divisant par xy, elle s'intègre immédiatement et donne

$$b^2\log y-a^2\log x=\text{const.}=\log k,$$

et l'on en déduit

$$y^{b^2}=kx^{a^2}$$

et, en posant $\frac{a^2}{b^2} = g$ et en modifiant le sens de k,

$$y = kx^g;$$

ce sont des paraboles si g est commensurable. Quand $a = b$, l'ellipsoïde est de révolution et l'on a des droites, ce qui était évident *a priori*.

Cherchons encore les lignes de pente du paraboloïde hyperbolique

$$z = p\frac{y}{x};$$

l'équation des courbes de niveau est $y = mx$: ce sont des droites issues d'un point fixe, leurs trajectoires sont des cercles en projection. Dans l'espace, ce sont des courbes du quatrième ordre. Les lignes de pente de tout conoïde droit se projetteront pour la même raison suivant des cercles.

Les lignes de niveau et de pente des surfaces de révolution à axe vertical sont évidemment les parallèles et les méridiens.

EXERCICES ET NOTES.

1. Trouver les lignes asymptotiques et les lignes de courbure de l'hélicoïde gauche à plan directeur (c'est un conoïde engendré par une droite qui s'appuie sur l'axe d'une hélice et sur cette hélice en restant perpendiculaire à l'axe).

2. Trouver les lignes asymptotiques d'un tore engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes.

(*Concours de licence,* nov. 1882.)

3. Trouver les asymptotiques de la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3,$$

et montrer que cette surface est de révolution.

4. Sur une surface quelconque, les lignes de courbure n'ont pas d'enveloppe. (MOUTARD.)

5. Trouver les lignes de courbure du paraboloïde $z = xy$.

6. Trouver les lignes asymptotiques du conoïde $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; montrer que ces lignes peuvent toujours se trouver par des quadratures.

7. Trouver les lignes de courbure et les asymptotiques de la surface

$$xyz = a^3.$$

8. Si une ligne asymptotique est géodésique, elle est droite.

9. Si toutes les lignes asymptotiques d'un même système sur une surface sont planes, cette surface est réglée et les asymptotiques en question sont les génératrices.

10. Si les tangentes d'une courbe rencontrent une sphère sous un angle constant, cette courbe est une géodésique de cône ayant son sommet au centre de la sphère. (PAUL SERRET, *Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure.*)

11. Si les normales principales d'une courbe font un angle constant avec une droite fixe, cette courbe est une géodésique d'hélicoïde développable. (*Id.*)

12. Si les normales principales d'une courbe rencontrent une droite fixe D, cette courbe est une géodésique d'une surface de révolution autour de D. (*Id.*)

13. Si les tangentes à une courbe rencontrent une droite fixe, cette courbe est plane; on peut déduire de là un moyen pour exprimer qu'une courbe est plane.

14. Toute surface développable est la surface rectifiante de ses géodésiques.

15. Si l'on fait rouler un plan sur une surface développable S, une courbe C, tracée sur le plan, engendrera une surface S'; la courbe C sera à la fois dans toutes ses positions ligne géodésique et ligne de courbure de S'. Si la courbe C se réduit à une droite, la surface S' sera développable. (MONGE.)

16. Toute développable ayant ses lignes de courbure planes est un hélicoïde.

17. Toute développable circonscrite à une surface le long d'une ligne de courbure plane est un hélicoïde.

18. Toute développable ayant pour lignes de courbure ses génératrices et des cercles est un cône de révolution.

19. Lignes asymptotiques de la surface $z = f(x) - f(y)$.

20. Lignes de courbure de la surface

$$e^{-z} = \sin x \sin y.$$

21. Les lignes asymptotiques de la surface tétraédrale

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1 \tag{1}$$

sont données par (1) et

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{2}} + \sqrt{\beta}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{2}} + \sqrt{\gamma}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{m}{2}} = 0,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0;$$

α, β, γ sont d'ailleurs arbitraires.

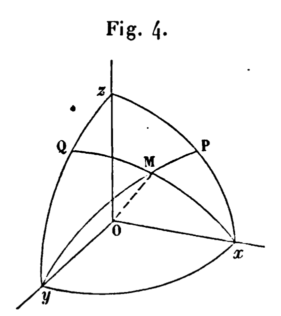
CHAPITRE II.

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

I. — Coordonnées sphériques.

On peut représenter un point M sur la sphère, en le rapportant comme il suit à un triangle trirectangle x, y, z. Soit O

Fig. 4.



le centre (*fig.* 4) : par x et y nous ferons passer des arcs de grand cercle xQ, yP rencontrant le point M. Nous poserons

$$\xi = \operatorname{tang} z\mathrm{P}, \qquad \eta = \operatorname{tang} z\mathrm{Q};$$

en appelant x, y, z les coordonnées de M par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, on a

$$(1) \qquad \xi = \frac{x}{z}, \qquad \eta = \frac{y}{z}.$$

En effet, par exemple, on a

$$z = \mathrm{OM} \cos \mathrm{MP} \cos z\mathrm{P},$$
$$x = \mathrm{OM} \cos \mathrm{MP} \sin z\mathrm{P};$$

d'où

$$\frac{x}{z} = \frac{\sin zP}{\cos zP} = \operatorname{tang} zP = \xi.$$

Les formules (1) serviront au calcul des *coordonnées sphériques* ξ et η d'un point dont on connaîtra les coordonnées ordinaires.

On peut d'ailleurs, à un autre point de vue, considérer les coordonnées x, y, z comme des coordonnées *sphériques homogènes*.

Équation d'un grand cercle. — Un grand cercle est la trace sur la sphère d'un plan qui passe par le centre : son équation est

$$(2) \qquad Ax + By + Cz = 0;$$

en divisant par z et en faisant usage des formules (1), on aura, pour tous les points du plan (2) situés sur la sphère,

$$(1) \qquad A\xi + B\eta + C = 0;$$

c'est l'équation d'un grand cercle, son équation rendue homogène est (1). Réciproquement, toute équation du premier degré en ξ et η, ou homogène en x, y, z, représente un grand cercle; lorsque cette équation est de la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les coordonnées homogènes du pôle de ce cercle; car ce sont les cosinus directeurs de la normale au plan du grand cercle, et par suite les coordonnées du point situé à la distance un de l'origine et situé sur la normale au plan du grand cercle.

Équation d'un petit cercle. — L'équation d'un petit cercle s'obtiendra en faisant, dans l'équation d'un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$x = \xi z$, $y = \eta z$, d'où

$$(A\xi + B\eta + C)z + D = 0;$$

d'ailleurs, en supposant le rayon de la sphère égal à 1, on a

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \text{ou} \qquad z^2(\xi^2+\eta^2+1)=1$$

et par suite

$$z=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}};$$

on a donc, pour l'équation du petit cercle,

$$A\xi+B\eta+C=D\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}$$

ou, sous une forme homogène,

$$(Ax+By+Cz)^2=D^2(x^2+y^2+z^2);$$

c'est l'équation du cône droit à base circulaire, le pôle du cercle a pour coordonnées homogènes A, B, C.

Distance de deux points. — La distance sphérique δ de deux points (ξ, η) et (ξ', η') ou (x, y, z) et (x', y', z') est évidemment donnée par la formule

$$\cos\delta=xx'+yy'+zz'=\frac{\xi\xi'+\eta\eta'+1}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+1)(\xi'^2+\eta'^2+1)}},$$

qui n'est autre que l'équation d'un petit cercle.

Angle de deux arcs de grand cercle. — Il est égal à la distance de leurs pôles.

II. — Théorie des tangentes.

L'arc de cercle tangent à une courbe représentée par une relation entre ξ et η est facile à trouver, il suffit d'exprimer qu'il passe en ξ, η et en $\xi+d\xi, \eta+d\eta$; on a alors, en appelant Ξ, H les coordonnées courantes,

$$H-\eta=(\Xi-\zeta)\frac{d\eta}{d\xi}.$$

Si l'on désigne par

$$f(\xi, \eta)=0,$$

ou mieux par

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la courbe rendue homogène, l'équation de l'arc de grand cercle tangent sera

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

le pôle de ce cercle a pour coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ou, si l'on veut, $d\eta$, $-d\xi$, $\eta d\xi - \xi d\eta$.

III. — De la courbe polaire.

On appelle *courbe polaire* d'une courbe donnée le lieu des pôles des arcs de grand cercle tangents à la courbe donnée; son équation s'obtient en éliminant x, y, z entre

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

$$X = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial f}{\partial z},$$

et, comme on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

on pourra remplacer (1) par

$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

Il existe une sorte de réciprocité entre la courbe et sa courbe polaire : ainsi, *quand la courbe* C′ *est polaire de* C, C *est aussi la courbe polaire de* C′.

Soient, en effet, A, B deux points voisins de la courbe C : pour obtenir le pôle de l'arc de grand cercle passant par A et B, on décrira de A et B comme pôles deux arcs de grand cercle, leur intersection I est le pôle de AB; or ils sont tangents au lieu du point I; donc A est le pôle de l'arc de grand cercle tangent en I. C. Q. F. D.

Autrement, pour passer du point $A(x, y, z)$ de la courbe

proposée au point $A'(x', y', z')$ de la polaire, on décrit un arc de grand cercle normal à la courbe et sur cet arc on compte un quadrant; on a donc

$$(a) \qquad xx' + yy' + zz' = 0.$$

L'équation du cercle normal en A est

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0,$$

et, comme $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, on a $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$; l'équation du cercle normal est donc

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Sur ce cercle se trouve le point (x', y', z'), donc

$$x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz = 0;$$

mais, en différentiant (a), on a

$$x\,dx' + x'\,dx + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation précédente,

$$x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' = 0,$$

qui exprime que le cercle normal en $x'y'z'$ contient le point (x, y, z).

IV. — Courbure et développées.

L'enveloppe d'une courbe sphérique contenant dans son équation un paramètre variable est le lieu des intersections successives de cette courbe : la théorie des enveloppes sur la sphère se fait comme sur le plan; nous n'avons donc rien à ajouter à ce qui a été dit plus haut. Observons seulement que la courbe polaire d'une courbe est l'*enveloppe* des grands cercles ayant les points de la courbe proposée pour pôles.

Si, par les extrémités d'un arc ds de courbe sphérique, on mène des arcs de grands cercles tangents à cet arc, leur angle ε est ce que l'on appelle l'*angle de contingence géodésique*.

La limite du rapport $\frac{\varepsilon}{ds}$ est ce que l'on appelle la *courbure géodésique*.

Le grand cercle tangent en x, y, z a pour équation

$$AX + BY + CZ = 0,$$

et, comme il passe par les points (x, y, z) et $x + dx, y + dy, z + dz$, on a

$$\sum X(z\,dy - y\,dz) = 0;$$

le grand cercle tangent infiniment voisin a pour équation

$$\sum X(z\,dy - y\,dz + z\,d^2y - y\,d^2z) = 0;$$

on a donc

$$\sin^2\varepsilon = \frac{\sum x^2(Ax + By + Cz)^2}{\left[\sum (z\,dy - y\,dz)^2\right]^2},$$

en appelant A, B, C les coefficients $d^2z\,dy - d^2y\,dz, \ldots$ du plan osculateur. On peut encore écrire, en observant que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$$\varepsilon = \frac{Ax + By + Cz}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

et en appelant θ l'angle que fait la binormale avec le rayon du point (x, y, z) et ρ le rayon de courbure de la courbe,

$$\varepsilon = \frac{\cos\theta}{\rho}\,ds,$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\gamma} = \frac{\cos\theta}{\rho};$$

donc :

La courbure géodésique est la projection de la courbure ordinaire sur le plan tangent.

V. — De l'indicatrice sphérique.

Si par le centre d'une sphère (que nous supposerons de rayon un pour plus de simplicité) on mène tous les rayons parallèles aux tangentes d'une courbe donnée, on forme une surface conique dont la trace sur la sphère porte le nom d'*indicatrice sphérique* de la courbe proposée. Cette indicatrice a elle-même une indicatrice que nous appellerons la *seconde indicatrice* de la courbe proposée.

THÉORÈME I. — *Si par le centre de la sphère on mène des plans parallèles aux plans osculateurs d'une courbe, les arcs de grands cercles qu'ils déterminent sur la sphère enveloppent l'indicatrice de cette courbe.*

En effet, le plan osculateur étant parallèle à deux tangentes infiniment voisines, le plan parallèle au plan osculateur mené par le centre de la sphère contiendra deux génératrices du cône qui a pour base l'indicatrice; il sera donc tangent à ce cône; les traces de ce plan et du cône sur la sphère seront donc tangentes. C. Q. F. D.

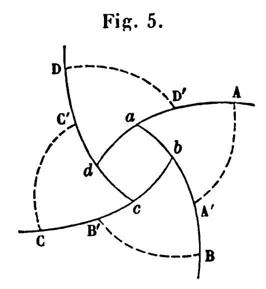
THÉORÈME II. — *Si par le centre de la sphère on mène trois axes parallèles aux trois directions principales d'une courbe, le premier (parallèle à la tangente) décrira l'indicatrice, le second (parallèle à la normale principale) décrira la seconde indicatrice, le troisième (parallèle à la binormale) décrira la polaire de l'indicatrice.*

En effet, la parallèle à la normale principale est située dans un plan parallèle au plan osculateur; sa trace est donc située sur l'arc du grand cercle tangent à la courbe indicatrice et à une distance du point de contact égale à $\frac{\pi}{2}$; le point correspondant de la seconde indicatrice est précisément situé de la même façon, etc.

VI. — Théorèmes de M. O. Bonnet et Jacobi.

Considérons un polygone sphérique : prolongeons chacun de ses côtés ab, bc, cd, da (fig. 5), puis des points a, b, c, d comme centres décrivons des arcs AA′, BB′, CC′, DD′

Fig. 5.



avec un rayon sphérique d'un quadrant. La figure AA′BB′CC′DD′ *partagera la sphère en deux parties égales.*

En effet, la figure en question est égale à l'aire du polygone P plus la somme des aires des triangles aAA′, bBB′, ..., respectivement mesurés par les angles extérieurs AaA′, BbB′, ..., que nous appellerons a', b', ...; en appelant donc X l'aire en question, on aura

$$X = P + \sum a', \qquad (1)$$

mais l'aire du polygone P, dont nous supposerons le nombre des côtés égal à n, a pour mesure

$$P = \sum a - (n - 2)\pi, \qquad (2)$$

Σa désignant la somme des angles intérieurs du polygone. Or $a = \pi - a'$, donc $\Sigma a = n\pi - \Sigma a'$; la formule (2) devient alors

$$P = 2\pi - \sum a',$$

et (1) devient

$$X = 2\pi;$$

ainsi la surface en question est bien égale à la demi-sphère. (Il est inutile de faire observer que, si le polygone P n'était pas convexe, les triangles, tels que aAA', devraient être affectés de signes convenables.)

Cette proposition, due à M. Bonnet, a pour corollaire le théorème suivant dû à Jacobi :

Théorème. — *La seconde indicatrice sphérique d'une courbe fermée partage la sphère en deux parties égales, et, en général, l'indicatrice d'une courbe sphérique fermée quelconque jouit de cette propriété.* (Les courbes en question sont supposées sans points anguleux; si elles avaient de tels points, on corrigerait facilement l'énoncé.)

Pour le prouver, il suffit de supposer que le polygone de M. Bonnet se réduise à une courbe; le contour $AA'BB'CC'DD'$ se réduit alors à son indicatrice.

VII. — Théorie des images de Gauss.

Gauss a donné le nom d'*image sphérique* d'une portion de la surface terminée à une courbe fermée C, à la portion de sphère inscrite dans ce qu'il appelle l'*image* de la courbe C.

L'*image* de la courbe C est la courbe que l'on obtient quand on cherche sur une sphère de rayon un le lieu des traces des rayons parallèles aux normales à la surface menées tout le long de la courbe C; d'après cela, on voit que :

Théorème. — *L'image sphérique d'une ligne asymptotique est la courbe polaire de son indicatrice sphérique.*

Cela résulte de ce que le plan osculateur de l'asymptotique étant le plan tangent à la surface, sa binormale est précisément la normale de la surface.

Nous allons maintenant démontrer un théorème de Gauss qui est d'une importance très grande dans la théorie des surfaces et dont ce géomètre a fait usage pour définir la courbure (voir *Disquisitiones circa superficies curvas*).

Théorème de Gauss. — *Autour d'un point* M *d'une surface, décrivons une aire fermée* $d\Omega$: *soient* $d\Omega'$ *son image sphérique,* R *et* R' *les rayons de courbure principaux en* M; *on aura*

$$RR' = \frac{d\Omega}{d\Omega'}.$$

Pour démontrer ce curieux théorème, nous prendrons, pour élément d'aire Ω, le triangle ayant pour sommets le point M, dont les coordonnées seront x, y, z, et deux points voisins ayant pour coordonnées $x + dx, y + dy, z + dz$, et $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$; nous désignerons par X, Y, Z les coordonnées de l'image du point M, et l'image du triangle Ω' sera un triangle ayant pour sommets trois points dont les coordonnées seront X, Y, Z; $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, et $X + \delta X$, $Y + \delta Y$, $Z + \delta Z$.

La projection de l'aire Ω sur le plan des xy est

$$dy\,\delta x - dx\,\delta y;$$

la projection de l'aire Ω' est $dY\,\delta X - dX\,\delta Y$, et, comme les aires Ω et Ω' sont parallèles, leurs rapports seront égaux à ceux de leurs projections; on a donc

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{dY\,\delta X - dX\,\delta Y}{dy\,\delta x - dx\,\delta y},$$

c'est-à-dire, en vertu du théorème de M. Bertrand sur les déterminants fonctionnels,

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)};$$

or, en posant $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, on a

$$X = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad Y = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

donc

$$(1) \qquad \frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(p, q)} \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)};$$

mais

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{1 + q^2}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial X}{\partial q} = \frac{-pq}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \ldots,$$

donc

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(p, q)} = \frac{(1 + q^2)(1 + p^2) - p^2 q^2}{(p^2 + q^2 + 1)^3} = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2};$$

or on a aussi, en appelant r, s, t, les dérivées secondes de z,

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = rt - s^2.$$

On a donc, au lieu de (1),

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{RR'},$$

ce qui démontre le théorème énoncé. On en conclut

$$d\Omega' = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} d\Omega;$$

si l'on veut l'aire d'une portion finie d'image, il faudra remplacer $d\Omega$ par $dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ et intégrer pour tous les points de la portion de surface considérée; on aura ainsi

$$\Omega' = \int\int \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} dx\,dy,$$

en observant que

$$rt - s^2 = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)};$$

on peut aussi écrire

$$\Omega' = \int\int \frac{dp\, dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La quantité Ω' dont nous venons de donner plusieurs expressions, et qui représente l'aire de l'image d'une portion de surface, est ce que Gauss appelle la *courbure totale* de cette portion de surface.

Il est bon d'observer que, l'aire de la surface elle-même étant

$$\int\int d\Omega,$$

on peut la mettre sous la forme

$$\int\int RR'\, d\Omega'$$

ou encore

$$\int\int RR'\, d\theta \sin\theta\, d\psi,$$

θ désignant la colatitude et ψ la longitude de l'image de l'élément $d\Omega$.

VIII. — Sur les images des lignes de courbure.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M appartenant à une ligne de courbure d'une surface S; soient ξ, η, ζ les cosinus des angles que la normale à la surface S fait avec les axes; ξ, η, ζ seront aussi les coordonnées de l'image du point M sur la sphère de rayon un décrite de l'origine comme centre.

Soient R et R' les rayons de courbure principaux en M : on a par le théorème de Rodrigues

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{dz}{d\zeta} = R;$$

or, en appelant ds et $d\sigma$ les arcs correspondants de la ligne de courbure considérée et de son image, on tire des formules (1)

$$(2) \qquad R = \frac{ds}{d\sigma};$$

des formules (1) on tire encore

$$dx = R\,d\xi, \qquad dy = R\,d\eta, \qquad dz = R\,d\zeta,$$

d'où

$$\begin{aligned} d^2x &= R\,d^2\xi + d\xi\,dR, \\ d^2y &= R\,d^2\eta + d\eta\,dR, \\ d^2z &= R\,d^2\zeta + d\zeta\,dR \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(3) \qquad dy\,d^2z - dz\,d^2y = R^2(d\eta\,d^2\zeta - d\zeta\,d^2\eta);$$

donc :

THÉORÈME — *Les lignes de courbure et leurs images ont aux points correspondants :* 1° *des tangentes parallèles;* 2° *des binormales parallèles;* 3° *des normales principales parallèles.*

Par suite, *elles ont les mêmes indicatrices sphériques, et suivant deux arcs correspondants les plans normaux à la surface et à la sphère sont parallèles.*

Deux arcs correspondants ds et $d\sigma$ sur la surface et sur la sphère sont liés entre eux par la relation

$$d\sigma = \frac{ds}{R},$$

R *désignant le rayon de courbure de la courbe tracée sur la surface.*

Les images des lignes de courbure forment comme ces courbes un réseau orthogonal.

Les équations (3) élevées au carré et ajoutées donnent, en appelant ρ le rayon de courbure de l'image,

$$\frac{ds^6}{R^2} = R^4 \frac{d\sigma^6}{\rho^2}$$

ou, en vertu de (2), $\rho = 1$; ainsi *le rayon de courbure de l'image est égal au rayon de la sphère.*

En général, toutes les surfaces parallèles ont des images de lignes de courbure coïncidentes; mais il est clair qu'il existera une infinité d'autres surfaces dont les lignes de courbure auront encore les mêmes images.

IX. — Lignes d'une surface dont les images sont les génératrices de la sphère.

Soient

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

les équations d'une surface; $f_1, f_2, f_3, \ldots$ les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, ... Cherchons la ligne de cette surface dont l'image est donnée par l'équation de deux génératrices de la sphère représentées par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ lx_1 + my_1 + nz_1 = 1, \end{cases}$$

l, m, n étant liés par la relation $l^2 + m^2 + n^2 = 1$; alors x_1, y_1, z_1 désigneront les coordonnées courantes. Il faut exprimer que la droite

$$(3) \qquad \frac{x_1}{f_1} = \frac{y_1}{f_2} = \frac{z_1}{f_3},$$

parallèle à la normale en x, y, z à la surface (1) menée par l'origine, rencontre la ligne (2); en d'autres termes, pour avoir la ligne cherchée, il faut éliminer x_1, y_1, z_1 entre (2) et (3),

ce qui donne, en observant qu'à la suite des rapports (3) on peut écrire $= \frac{lx_1 + my_1 + nz_1}{lf_1 + mf_2 + nf_3}$ ou même $= \frac{1}{lf_1 + mf_2 + nf_3}$,

$$(4) \qquad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = (lf_1 + mf_2 + nf_3)^2;$$

cette équation est l'équation d'une surface, imaginaire bien entendu, qui par son intersection avec (1) fera connaître la ligne cherchée.

Cette surface (4) est une développable circonscrite à la surface (1); (1) et (4) représentent la courbe de contact.

L'équation (4) peut s'écrire

$$(mf_3 - nf_2)^2 + (nf_1 - lf_3)^2 + (lf_2 - mf_1)^2 = 0,$$

et, comme les carrés qui figurent dans cette équation ne sont pas distincts, elle se décompose en deux autres du premier degré en f_1, f_2, f_3; notre développable se compose donc de deux cylindres circonscrits à (1). Ces cylindres contiennent la ligne réelle

$$\frac{f_1}{l} = \frac{f_2}{m} = \frac{f_3}{n};$$

si l'on suppose $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$, (4) se réduit à

$$(f_1 + f_2\sqrt{-1})(f_1 - f_2\sqrt{-1}) = 0,$$

et l'on voit ainsi que les génératrices des cylindres en question sont les droites isotropes situées dans les plans parallèles au plan tangent qui contient les génératrices considérées de la sphère; donc :

Si l'on circonscrit des cylindres isotropes (c'est-à-dire à génératrices isotropes) à une surface, les courbes de contact auront pour images les génératrices de la sphère.

Rapportons maintenant la surface à son plan tangent et à sa normale : son équation sera

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0x^2 + t_0y^2) + \ldots;$$

en prenant l'axe des x et l'axe des y dans les sections prin-

cipales, les courbes qui ont pour images les génératrices de la sphère ont, en vertu du théorème de Dupin, leurs tangentes conjuguées des directions $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; ces directions sont donc $\frac{r_0}{t_0}\sqrt{-1}$ et $-\frac{r_0}{t_0}\sqrt{-1}$, elles sont donc également inclinées sur les lignes de courbure; donc :

Si l'on connaît sur une surface les lignes dont les images sont les génératrices de la sphère, on obtiendra les lignes de courbure de cette surface en cherchant les lignes qui partagent en parties égales l'angle des premières.

Lorsque sur une surface les rayons de courbure sont égaux $r = t$ et $r_0 = t_0$, les courbes que nous considérons ont pour tangentes les droites isotropes, et la même chose a lieu si $r_0 = -t_0$; mais alors ces courbes sont conjuguées et l'on voit que :

Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont en chaque point égaux et de signes contraires, les courbes dont les images sont les génératrices de la sphère sont des courbes conjuguées.

X. — Digression sur une propriété des cercles orthogonaux.

Cherchons la condition pour que deux familles de cercles sur la sphère se coupent orthogonalement; nous allons bientôt avoir à nous servir du résultat auquel nous allons arriver. Soient

$$(ax + by + cz)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$(a'x + b'y + c'z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

les équations des deux familles de cercles; nous poserons pour abréger

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad ax + by + cz = P, \qquad a'x + b'y + c'z = P',$$

en sorte que ces deux équations pourront s'écrire

$$(1) \qquad P^2 - R^2 = 0, \qquad P'^2 - R^2 = 0;$$

les demi-dérivées de leurs premiers membres par rapport à x sont

$$Pa - x, \qquad P'a' - x, \qquad \ldots.$$

La condition d'orthogonalité des deux cercles est

$$(Pa - x)(P'a' - x) + (Pb - y)(P'b' - y) + (Pc - z)(P'c' - z) = 0$$

ou

$$(2) \qquad PP'(aa' + bb' + cc') - P^2 - P'^2 + R^2 = 0.$$

La condition cherchée s'obtiendra en éliminant x, y, z entre (1) et (2), ce qui donne (en éliminant, ce qui revient au même P, P', R)

$$aa' + bb' + cc' = 1.$$

Cette relation doit avoir lieu, quelle que soit la valeur des paramètres des familles de cercles. En particulier, cette formule doit avoir lieu pour deux systèmes de valeurs attribuées à a', b', c'; les paramètres a, b, c sont donc liés par deux équations linéaires, et, par suite, les plans

$$ax + by + cz = \rho$$

des cercles de la première famille, ρ désignant le rayon de la sphère, passent par une droite fixe; l'autre système de cercles doit avoir également ses plans concourants suivant une droite fixe. Les équations des plans de nos cercles doivent donc être de la forme

$$(a + \lambda a_1)x + (b + \lambda b_1)y + (c + \lambda c_1)z = \rho,$$
$$(a' + \lambda' a'_1)x + (b' + \lambda' b'_1)y + (c' + \lambda' c'_1)z = \rho,$$

et de plus, on doit avoir, quels que soient λ et λ',

$$(a + \lambda a_1)(a' + \lambda' a'_1) + \ldots = 1$$

ou

$$\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 1, \\ aa'_1 + bb'_1 + cc'_1 &= 0, \\ a'a_1 + b'b_1 + c'c_1 &= 0, \\ a_1a'_1 + b_1b'_1 + c_1c'_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces formules expriment que le produit

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a' & b' & c' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}$$

est nul, quels que soient p, q, r, p', q', r', et, en particulier, quand on prend

$$\begin{aligned} p &= b'c'_1 - c'b'_1, & q &= c'a'_1 - c'_1a', & r &= a'b'_1 - b'a'_1, \\ p' &= bc_1 - cb_1, & q' &= ca_1 - ac_1, & r' &= ab_1 - ba_1; \end{aligned}$$

or le produit est alors

$$[(b'c'_1 - c'b'_1)(bc_1 - cb_1) + \ldots]^2;$$

il s'annule quand les droites par lesquelles passent les plans des cercles en question sont rectangulaires. Donc :

Pour que deux familles de cercles tracés sur une sphère soient orthogonales, il faut : 1° *que les plans des cercles d'une famille concourent suivant une droite;* 2° *que les droites par lesquelles passent les plans des deux familles soient rectangulaires.*

Cette condition est évidemment suffisante.

Nous allons maintenant faire une application importante de ce théorème.

XI. — Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

Si toutes les lignes de courbure d'une surface sont planes, leurs plans, en vertu du théorème de Lancret (p. 25), coupent la surface sous un angle constant; l'image sphérique des

lignes de courbure est formée par l'intersection de cônes de révolution ayant leurs centres au centre de la sphère, avec la sphère; les images sphériques des lignes de courbure sont donc des cercles orthogonaux, et par suite, en vertu du paragraphe précédent, ces cercles ont des plans qui passent par deux droites de directions perpendiculaires. Ainsi les lignes de courbure des surfaces en question sont nécessairement situées dans des plans parallèles à deux droites rectangulaires.

EXERCICES ET NOTES.

1. Si l'on appelle *ellipse sphérique* l'intersection d'un cône de second degré avec une sphère décrite de son sommet comme centre, étudier, à l'aide des coordonnées sphériques, les propriétés de cette courbe. En particulier, démontrer qu'il existe deux points sur la sphère, f et f', tels que, si M désigne un point de la courbe, on ait $Mf \pm Mf' =$ const., et que la tangente partage en deux parties égales l'angle de Mf avec Mf'.

2. La *loxodromie* est une courbe qui coupe sous un angle constant tous les méridiens passant par le même pôle : trouver l'équation différentielle de cette courbe; elle est en coordonnées polaires $d\theta = c \sin\theta \, d\psi$, c désignant une constante. La projection stéréographique de la loxodromie est une spirale logarithmique; cette propriété peut servir à trouver un grand nombre de propriétés de la loxodromie.

3. Trouver l'équation de la développante sphérique d'un petit cercle de la sphère (hélice sphérique).

4. Trouver les trajectoires orthogonales de tous les cercles de la sphère qui passent par deux points fixes. Trouver les projections stéréographiques de ces trajectoires.

5. En général, si $f(\theta, \psi) = 0$ représente une courbe sphérique $f(2 \operatorname{arc tang} \rho, \omega) = 0$ représentera en coordonnées polaires ρ, ω la projection stéréographique de cette courbe.

6. Étudier les courbes sphériques qui ont pour projections stéréographiques des coniques des ovales de Descartes, des ovales de Cassini.

7. D'un point P comme centre, pris sur une surface S, décrivons une sphère infinitésimale, qui découpe sur cette surface une courbe de périmètre C; soit C' le périmètre de l'image sphérique de C, soient R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de S en P; on aura

$$\lim \frac{C'}{C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

(R. Sturm.)

CHAPITRE III.

DES COORDONNÉES CURVILIGNES SUR UNE SURFACE.

I. — Préliminaires.

On peut remarquer que, dans la plupart des systèmes de coordonnées que l'on emploie (nous laissons, bien entendu, de côté les coordonnées tangentielles), la position d'un point est donnée par l'intersection de trois surfaces : ainsi, dans les systèmes de coordonnées rectilignes, les trois surfaces sont trois plans parallèles aux plans des xy, des xz et des yz; dans le système des coordonnées polaires r, θ, ψ les trois surfaces sont une sphère de rayon r, un cône décrit, autour de l'axe des z ayant θ pour demi-angle au sommet, un plan passant par l'axe des z et faisant l'angle ψ avec le plan des xz .... Dans chacun de ces cas, trois paramètres x, y, z ou r, θ, ψ, ... font connaître les *surfaces coordonnées*.

En se plaçant à ce point de vue, Lamé a été conduit à introduire dans la Science un système très général de coordonnées dites *curvilignes :* voici en quoi il consiste. Soient

$$\lambda(x, y, z) = \text{const.}, \qquad \mu(x, y, z) = \text{const.}, \qquad \nu(x, y, z) = \text{const.}$$

les équations de trois familles de surfaces. Quand on se donnera les valeurs constantes de λ, μ, ν, on aura trois équations qui feront connaître x, y, z et qui, par suite, détermineront en général un certain nombre de points dont les valeurs constantes λ, μ, ν seront les *coordonnées curvilignes* du point x, y, z; réciproquement, x, y, z étant donnés, on en conclut λ, μ, ν, et par suite un point quelconque aura *ordinairement* des *coordonnées curvilignes*.

L'avantage des *coordonnées rectilignes* est de déterminer toujours un point de l'espace et un seul. Il semble alors que l'on doive toujours leur accorder la préférence; nous verrons cependant que les coordonnées curvilignes ont aussi leurs avantages. En particulier, quand il s'agit d'étudier les lignes tracées sur une surface, il semble naturel de faire entrer la surface en question dans un système de coordonnées curvilignes; la coordonnée relative à cette surface restant constante, on n'a plus alors que deux variables à considérer. C'est ainsi que, pour étudier les figures tracées dans le plan, on peut prendre ce plan pour plan des xy, et la coordonnée z n'intervient plus.

Nous commencerons l'étude des coordonnées curvilignes par celle des diverses lignes remarquables que l'on peut tracer sur une surface donnée et en particulier sur le plan.

II. — Coordonnées curvilignes dans le plan.

Si l'on considère deux équations

$$(a) \qquad \varphi(x, y) = \lambda, \qquad \psi(x, y) = \mu,$$

ou les équations équivalentes obtenues en les résolvant par rapport à x et y,

$$(a') \qquad x = \Phi(\lambda, \mu), \qquad y = \Psi(\lambda, \mu),$$

elles représenteront deux courbes variables de forme avec les paramètres λ, μ; ces courbes par leurs intersections détermineront des points variables, mais ayant une position fixe quand λ et μ seront fixes; λ et μ étant donnés, certains points du plan seront déterminés : λ et μ seront alors les *coordonnées curvilignes* de ces points.

Si l'on pose, par exemple,

$$x = \lambda \cos \mu, \qquad y = \lambda \sin \mu,$$

λ et μ seront les coordonnées curvilignes polaires du point

(x,y); en se donnant λ et μ, on détermine un point par l'intersection du cercle

$$x^2+y^2=\lambda^2$$

et de la droite

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tang}\mu.$$

En général, $\lambda=$ const., $\mu=$ const., représenteront deux familles de courbes que l'on appelle *lignes coordonnées;* quand ces lignes se coupent partout sous un angle droit, on dit que les coordonnées sont orthogonales.

Pour que les équations (a) définissent un système de coordonnées orthogonales, il faut évidemment que l'on ait

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

quels que soient x et y, ou bien encore

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu}=0;$$

en effet, cette dernière équation exprime que le déplacement $\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda$, $\frac{\partial y}{\partial\lambda}\,d\lambda$, effectué sur la courbe $\mu=$ const., est perpendiculaire au déplacement $\frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\mu$, $\frac{\partial y}{\partial\mu}\,d\mu$ effectué sur la courbe $\lambda=$ const.

Soit ds la différentielle d'un arc de courbe quelconque tracé dans le plan et passant par le point dont les coordonnées rectilignes sont x, y, et les coordonnées curvilignes λ, μ; supposons les coordonnées x, y rectangulaires : on aura

$$ds^2=dx^2+dy^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda+\frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\mu\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\,d\lambda+\frac{\partial y}{\partial\mu}\,d\mu\right)^2.$$

Si l'on pose

$$(b)\qquad\left\{\begin{aligned} L&=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2,\\ M&=\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2,\\ R&=\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu},\end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(c) \qquad ds^2 = L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2,$$

et, si les coordonnées λ, μ sont orthogonales,

$$ds^2 = L\,d\lambda^2 + M\,d\mu^2.$$

Il est facile de voir que, si dans (c) on fait $\mu = \text{const.}$, on aura $d\mu = 0$ et $ds^2 = L\,d\lambda^2$, d'où $ds = \sqrt{L}\,d\lambda$, de sorte que $\sqrt{L}\,d\lambda$ et $\sqrt{M}\,d\mu$ sont les éléments d'arcs des lignes coordonnées.

Si l'on appelle θ l'angle que les lignes coordonnées font entre elles et i l'angle de l'élément ds avec la ligne $\mu = \text{const.}$, on a

$$\cos\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu}\right) : \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2\right]}$$

ou

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{LM}},$$

$$\frac{\sin i}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{M}\,d\mu}{ds}$$

et, en coordonnées rectangulaires,

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{M}\,d\mu}{\sqrt{L}\,d\lambda}.$$

Calculons le rayon de courbure ρ d'une courbe quelconque en un point λ, μ. On a

$$\pm\frac{ds^3}{\rho} = d^2y\,dx - d^2x\,dy = -\begin{vmatrix} d^2x & d^2y \\ dx & dy \end{vmatrix};$$

multiplions par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu} \end{vmatrix} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2}$$

$$= \sqrt{LM - R^2};$$

nous aurons

$$\sqrt{LM - R^2}\,\frac{ds^3}{\rho} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda^2 + 2\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda\,d\mu + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\mu^2 & \cdots \\ \sum \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 d\lambda + \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\mu & \cdots \end{vmatrix}$$

ou, en vertu des formules (b)

$$\sqrt{LM - R^2}\,\frac{ds^3}{\rho} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda}\,d\lambda^2 + \frac{\partial L}{\partial\mu}\,d\lambda\,d\mu + \left(\frac{\partial R}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\right)d\mu^2 & \cdots \\ L\,d\lambda + R\,d\mu & \cdots \end{vmatrix}.$$

Si nous supposons les coordonnées orthogonales, $R = 0$ et l'on a

$$2\sqrt{LM}\,\frac{ds^3}{\rho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial\lambda}\,d\lambda^2 + 2\frac{\partial L}{\partial\mu}\,d\lambda\,d\mu - \frac{\partial M}{\partial\lambda}\,d\mu^2 & \cdots \\ L\,d\lambda & \cdots \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} 2\sqrt{LM}\,\frac{ds^3}{\rho} = {} & + d\lambda^2\left(M\,d\mu\,\frac{\partial L}{\partial\lambda} + L\,d\lambda\,\frac{\partial L}{\partial\mu}\right) \\ & + 2\,d\lambda\,d\mu\left(M\,\frac{\partial L}{\partial\mu}\,d\mu - L\,\frac{\partial M}{\partial\lambda}\,d\lambda\right) \\ & - d\mu^2\left(M\,\frac{\partial M}{\partial\lambda}\,d\mu + L\,\frac{\partial M}{\partial\mu}\,d\lambda\right). \end{aligned}$$

Supposons que la courbe soit la ligne coordonnée $\mu =$ const.; appelons ρ_μ son rayon de courbure, nous aurons

$$2\sqrt{LM}\,\frac{\sqrt{L^3}\,d\lambda^3}{\rho_\mu} = d\lambda^3 L\,\frac{\partial L}{\partial\mu}$$

on en déduit

$$\frac{1}{\rho_\mu} = \frac{1}{2L\sqrt{M}}\,\frac{\partial L}{\partial\mu};$$

on aurait de même

$$\frac{1}{\rho_\lambda} = \frac{1}{2M\sqrt{L}}\,\frac{\partial M}{\partial\lambda}.$$

Enfin l'aire élémentaire, comprise entre deux lignes coor-

données $\lambda = \text{const.}$, $\lambda + d\lambda = \text{const.}$, et deux autres lignes $\mu = \text{const.}$, $\mu + d\mu = \text{const.}$, est $\sqrt{LM}\, d\lambda\, d\mu \sin\theta$ ou

$$\sqrt{LM - R^2}\, d\lambda\, d\mu$$

et, en coordonnées rectangulaires,

$$\sqrt{LM}\, d\lambda\, d\mu.$$

III. — Coordonnées curvilignes d'un point sur une surface.

Soit $\nu = \text{const.} = \nu_0$ l'équation d'une surface donnée fixe, on peut toujours supposer que cette équation soit la résultante de trois autres, telles que

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \qquad y = \chi(\lambda, \mu), \qquad z = \psi(\lambda, \mu),$$

entre lesquelles on aurait éliminé λ et μ. Quand on pose $\lambda = \text{const.} = \lambda_0$, x, y et z sont liés entre eux, d'abord par la relation générale $\nu = \nu_0$ et puis aussi par une autre relation, telle que

$$\lambda_0 = F(x, y, z);$$

le point (x, y, z) décrit alors une courbe que nous pourrons considérer comme représentée par l'équation $\lambda = \lambda_0$; les courbes ainsi obtenues en donnant à λ et μ des valeurs déterminées portent le nom de *lignes coordonnées*. Il est clair que sur une surface il est possible de tracer une infinité de systèmes de lignes coordonnées.

Si l'on se donne à la fois $\lambda = \lambda_0$ et $\mu = \mu_0$, on détermine deux lignes coordonnées dont les intersections font connaître les points ayant pour coordonnées λ_0 et μ_0.

Soient p, p', p'' les coefficients directeurs de la normale à la surface considérée au point (x, y, z) ou (λ, μ). Exprimons que cette normale est perpendiculaire aux tangentes aux courbes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ passant en x, y, z : les coefficients directeurs des tangentes en question sont faciles à trouver, si l'on observe que, sur la courbe $\lambda = \text{const.}$, μ varie seul et

que x, y, z sont alors des fonctions de μ. Les coefficients directeurs de la tangente à la courbe $\lambda =$ const. sont donc $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y}{\partial \mu}$, $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ et, par suite, on a

$$(1)\quad \begin{cases} p\,\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + p'\,\dfrac{\partial y}{\partial \lambda} + p''\,\dfrac{\partial z}{\partial \lambda} = 0, \\[2ex] p\,\dfrac{\partial x}{\partial \mu} + p'\,\dfrac{\partial y}{\partial \mu} + p''\,\dfrac{\partial z}{\partial \mu} = 0; \end{cases}$$

p, p', p'' sont déterminés à un facteur près et l'on peut poser, en vertu des formules (1),

$$(2)\qquad p = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\lambda, \mu)}, \qquad p' = \frac{\partial(z, x)}{\partial(\lambda, \mu)}, \qquad p'' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)}.$$

De (1) l'on conclut d'ailleurs, en multipliant la première par $d\lambda$, la seconde par $d\mu$ et en ajoutant,

$$(3)\qquad p\,dx + p'\,dy + p''\,dz = 0,$$

pour tout déplacement dx, dy, dz effectué sur la surface.

[Cette formule (3) établit de nouveau l'existence du plan tangent : en effet, elle prouve que, si (1) ont lieu, c'est-à-dire que s'il existe une droite normale à deux tangentes passant en x, y, z sur la surface, elle est normale à toutes les tangentes passant par ce point; donc le lieu des tangentes au point x, y, z à la surface est un plan.]

Supposons que l'on se donne une relation entre λ et μ : le point (x, y, z) ou λ, μ décrira une courbe sur la surface $\nu = \nu_0$ et les coefficients directeurs de la tangente à cette courbe seront dx, dy, dz, c'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\,d\mu, \qquad \cdots.$$

Calculons l'élément d'arc ds de cette courbe : on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs exprimées en λ

et μ, à savoir

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\, d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\, d\mu,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\, d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu}\, d\mu,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\, d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu}\, d\mu,$$

on trouve

$$(4) \qquad ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2 + 2\mathrm{R}\, d\lambda\, d\mu + \mathrm{M}\, d\mu^2,$$

formule où l'on a posé

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{L} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \\ \mathrm{R} &= \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}, \\ \mathrm{M} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Quand les courbes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ se coupent à angle droit, on dit que les coordonnées sont orthogonales; alors on a évidemment $\mathrm{R} = 0$, en vertu de la seconde formule (5), car $\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}$, sont les coefficients directeurs des tangentes aux courbes $\mu = \text{const.}$ et $\lambda = \text{const.}$ La formule (4) se réduit alors à

$$ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2 + \mathrm{M}\, d\mu^2.$$

Nous signalerons la formule

$$(6) \qquad \mathrm{LM} - \mathrm{R}^2 = p^2 + p'^2 + p''^2,$$

que l'on vérifie en observant que, en vertu de (2),

$$\begin{aligned} p^2 + p'^2 + p''^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 + \ldots \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2\right] \\ &\quad - \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2; \end{aligned}$$

en vertu des formules (5), cette équation se réduit à (6).

Soient θ l'angle que les deux lignes coordonnées font entre elles, i l'angle qu'une ligne donnée fait avec la ligne $\mu =$ const. passant en x, y, z.

1° Les longueurs des arcs de lignes coordonnées s'obtiendront en faisant dans (4) successivement $d\mu = 0$ et $d\lambda = 0$; ainsi $\sqrt{L}\,d\lambda$ et $\sqrt{M}\,d\mu$ sont les longueurs des arcs élémentaires des lignes $\mu =$ const., $\lambda =$ const.

2° On a

$$\frac{\sqrt{L}\,d\lambda}{\sqrt{M}\,d\mu} = \frac{\sin(\theta - i)}{\sin i},$$

d'où

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{M}\,d\mu \sin\theta}{\sqrt{M}\,d\mu\cos\theta + \sqrt{L}\,d\lambda}.$$

Ces formules se démontrent à l'inspection du triangle ayant pour côtés l'arc de courbe donnée et les arcs des courbes $\mu =$ const., $\lambda =$ const.

3° D'ailleurs, en appelant V l'angle de deux arcs de courbe passant en x, y, z, on a

$$\cos V = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}},$$

en désignant par un d un déplacement effectué le long d'une des courbes et par un δ le déplacement effectué le long de l'autre.

Supposons qu'il s'agisse des lignes coordonnées : on aura

$$V = \theta,$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial\lambda}\,d\lambda, \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial\lambda}\,d\lambda,$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\mu, \qquad \delta y = \frac{\partial y}{\partial\mu}\,d\mu, \qquad \delta z = \frac{\partial z}{\partial\mu}\,d\mu;$$

donc

$$\cos\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)\frac{1}{\sqrt{L}\sqrt{M}}$$

ou

$$(7)\quad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{LM}}, \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{LM - R^2}{LM}}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{LM - R^2}}{R}.$$

IV. — Sur les cosinus directeurs de la normale.

Lorsque les coefficients directeurs p, p', p'' sont les cosinus α, β, γ directeurs de la normale, on a

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\beta\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0,$$

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial y}{\partial\mu}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\mu}=0;$$

mais on a, en outre,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

et, par suite,

$$\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial\lambda}+\beta\frac{\partial \beta}{\partial\lambda}+\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial\lambda}=0,$$

$$\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial \beta}{\partial\mu}+\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial\mu}=0,$$

et, en éliminant α, β, γ,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial\lambda} & \frac{\partial \beta}{\partial\lambda} & \frac{\partial \gamma}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial\mu} & \frac{\partial \beta}{\partial\mu} & \frac{\partial \gamma}{\partial\mu} \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial\lambda} & \frac{\partial \beta}{\partial\lambda} & \frac{\partial \gamma}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial\mu} & \frac{\partial \beta}{\partial\mu} & \frac{\partial \gamma}{\partial\mu} \end{vmatrix}=0;$$

mais ces relations ne seront distinctes que si l'on n'a pas

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}:\frac{\partial x}{\partial\mu}=\frac{\partial y}{\partial\lambda}:\frac{\partial y}{\partial\mu}=\frac{\partial z}{\partial\lambda}:\frac{\partial z}{\partial\mu},$$

auquel cas x, y, z seront fonctions d'une seule variable, ce qui ne peut pas avoir lieu. Ces relations seront illusoires si $\frac{\partial \alpha}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial \beta}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial\lambda}$ sont proportionnels à $\frac{\partial \alpha}{\partial\mu}$, $\frac{\partial \beta}{\partial\mu}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial\mu}$, c'est-à-dire si α, β, γ sont fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire si la surface est développable.

On voit donc que, pour toute surface non développable, il y aura deux relations entre les dérivées de x, y, z et des cosinus directeurs α, β, γ.

V. — Des systèmes de coordonnées les plus simples.

Liouville a montré, dans une Note insérée dans son Journal, que l'on pouvait toujours, sur une surface donnée, choisir les coordonnées curvilignes, de telle sorte que l'on ait à la fois

$$L = M, \qquad R = 0,$$

où $L = 0$, $M = 0$. Voici son analyse : nous avons trouvé

$$ds^2 = L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2.$$

Décomposons le second membre de cette formule en facteurs du premier degré de la forme $P\,d\lambda + Q\,d\mu$, ces facteurs seront imaginaires conjugués. Si ces facteurs ne sont pas des différentielles exactes, comme ils sont conjugués, ils auront des facteurs intégrants de la forme $m + n\sqrt{-1}$, $m - n\sqrt{-1}$ qui les transformeront en différentielles exactes $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, et $d\alpha - d\beta\sqrt{-1}$; on pourra donc poser

$$ds^2 = \frac{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}{m + n\sqrt{-1}}\,\frac{d\alpha - d\beta\sqrt{-1}}{m - n\sqrt{-1}}$$

ou

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{m^2 + n^2};$$

d'où résulte que *l'on peut toujours, et d'une infinité de manière, prendre* $M = L$, $R = 0$. Les lignes coordonnées forment alors ce que l'on appelle un *réseau isométrique.*

Supposons maintenant qu'on ait trouvé à la fois

$$ds^2 = \Lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \qquad ds^2 = \Lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2);$$

on en conclura

$$\Lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) = \Lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2);$$

mais, α' et β' étant fonctions de α et de β, on a

$$d\alpha'^2 = \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\,d\beta\right)^2,$$

$$d\beta'^2 = \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\,d\beta\right)^2;$$

en substituant ces valeurs dans la formule précédente, on a identiquement

$$\begin{aligned} &d\alpha^2\left[\Lambda - \Lambda'\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\right)^2 - \Lambda'\left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right)^2\right] \\ &- 2\,d\alpha\,d\beta\left(\Lambda'\,\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} + \Lambda'\,\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\right) \\ &+ d\beta^2\left[\Lambda - \Lambda'\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\right)^2 - \Lambda'\left(\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\right)^2\right] = 0. \end{aligned}$$

Égalons à zéro les coefficients de $d\alpha^2$, $d\beta^2$ et $d\alpha d\beta$; éliminons $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, nous aurons

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} + \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\right)^2.$$

Si l'on multiplie la première équation par $2\sqrt{-1}$ et si on l'ajoute avec la seconde, on a

$$\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right)^2 = 0;$$

donc

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} = \pm\left(\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} - \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\sqrt{-1}\right)$$

ou

$$\frac{\partial(\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1})}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\partial(\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1})}{\partial\beta};$$

cette formule peut s'écrire

$$\frac{\partial(\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1})}{\partial(\alpha,\ \beta)} = 0;$$

donc

$$\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1} = F(\alpha - \beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\alpha' \mp \beta'\sqrt{-1} = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

Les deux formes obtenues pour ds^2 ne sauraient donc différer que par l'emploi d'un facteur d'intégrabilité.

Signalons enfin l'emploi d'un système de coordonnées dites *symétriques*. Supposons ds^2 de la forme

$$ds^2 = \Lambda(d\lambda^2 + d\mu^2);$$

si l'on pose

$$d\lambda + d\mu\sqrt{-1} = d\xi,$$
$$d\lambda - d\mu\sqrt{-1} = d\eta,$$

il vient

$$ds^2 = \Lambda\, d\xi\, d\eta.$$

Ainsi ds^2 peut affecter la forme $2R\, d\lambda\, d\mu$, mais R est nécessairement imaginaire; ces lignes de coordonnées imaginaires sont de longueur nulle.

D'après ce qui précède, c'est parmi les coordonnées symétriques que l'on pourra espérer rencontrer le maximum de simplicité dans la plupart des calculs.

VI. — Applications.

Pour trouver un réseau isométrique sur la sphère, appliquons la méthode de Liouville. En prenant d'abord pour lignes coordonnées des parallèles et des méridiens, on a

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2) \\ &= a^2(d\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\, d\psi)(d\theta - \sqrt{-1}\sin\theta\, d\psi); \end{aligned}$$

les facteurs intégrants des facteurs qui figurent dans l'expres-

sion de ds^2, sont tous deux égaux à $\frac{1}{\sin\theta}$; on pourra donc écrire

$$\begin{aligned}
ds^2 &= a^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{\sin\theta}+\sqrt{-1}\,d\psi\right)\left(\frac{d\theta}{\sin\theta}-\sqrt{-1}\,d\psi\right)\\
&= a^2\sin^2\theta\,d\left(\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta+\sqrt{-1}\,\psi\right)d\left(\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta-\sqrt{-1}\,\psi\right)\\
&= a^2\sin^2\theta\left[(d\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta)^2+d\psi^2\right].
\end{aligned}$$

Nous poserons

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta=\lambda,\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta=e^\lambda,\qquad \sin\theta=\frac{2e^\lambda}{1+e^{2\lambda}}$$

ou

$$\sin\theta=\frac{2}{e^{-\lambda}+e^\lambda};$$

il en résulte

$$ds^2=\frac{4a^2}{(e^{-\lambda}+e^\lambda)^2}(d\lambda^2+d\psi^2);$$

les équations de la sphère seront

$$\begin{aligned}
x &= a\,\frac{2\cos\psi}{e^{-\lambda}+e^\lambda},\\
y &= a\,\frac{2\sin\psi}{e^{-\lambda}+e^\lambda},\\
z &= a\,\frac{e^\lambda-e^{-\lambda}}{e^\lambda+e^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

VII. — Rayon de courbure d'une section normale.

Les équations de l'axe du cercle osculateur sont

$$\begin{aligned}
(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz &= 0,\\
(X-x)d^2x+(Y-y)d^2y+(Z-z)d^2z &= ds^2;
\end{aligned}$$

si l'on coupe par la normale à la surface, on obtient, comme l'on sait, le centre de courbure de la section normale menée par la direction dx, dy, dz. Soit ρ le rayon de courbure de

cette section : les équations de la normale seront

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{p'}=\frac{Z-z}{p''}=\frac{\rho}{\sqrt{LM-R^2}};$$

l'élimination de $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ donne

$$(a)\qquad (p\,d^2x+p'\,d^2y+p''\,d^2z)\frac{\rho}{\sqrt{LM-R^2}}=ds^2.$$

Posons

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&p\frac{\partial^2x}{\partial\lambda^2}+p'\frac{\partial^2y}{\partial\lambda^2}+p''\frac{\partial^2z}{\partial\lambda^2}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2x}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2y}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2z}{\partial\lambda^2}\\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu}\end{vmatrix}=l,\\
&p\frac{\partial^2x}{\partial\lambda\,\partial\mu}+p'\frac{\partial^2y}{\partial\lambda\,\partial\mu}+p''\frac{\partial^2z}{\partial\lambda\,\partial\mu}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2x}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \frac{\partial^2y}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \frac{\partial^2z}{\partial\lambda\,\partial\mu}\\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu}\end{vmatrix}=r,\\
&p\frac{\partial^2x}{\partial\mu^2}+p'\frac{\partial^2y}{\partial\mu^2}+p''\frac{\partial^2z}{\partial\mu^2}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2x}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2y}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2z}{\partial\mu^2}\\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu}\end{vmatrix}=m;
\end{aligned}\right.$$

nous aurons, au lieu de (a),

$$l\,d\lambda^2+2r\,d\lambda\,d\mu+m\,d\mu^2=\frac{\sqrt{LM-R^2}}{\rho}(L\,d\lambda^2+2R\,d\lambda\,d\mu+M\,d\mu^2);$$

on en conclut

$$(9)\qquad \frac{\sqrt{LM-R^2}}{\rho}=\frac{l\,d\lambda^2+2r\,d\lambda\,d\mu+m\,d\mu^2}{L\,d\lambda^2+2R\,d\lambda\,d\mu+M\,d\mu^2}.$$

Si l'on veut le maximum et le minimum de ρ, c'est-à-dire les rayons de courbure principaux de la surface, il faudra,



d'après ce que l'on sait sur le maximum des fractions dont les deux termes sont du second degré, exprimer que l'équation (9) en $\frac{d\lambda}{d\mu}$ a deux racines égales, ce qui donne

$$(10)\quad \begin{cases} \left(r\frac{\rho}{\sqrt{LM - R^2}} - R\right)^2 \\ = \left(l\frac{\rho}{\sqrt{LM - R^2}} - L\right)\left(m\frac{\rho}{\sqrt{LM - R^2}} - M\right). \end{cases}$$

Telle est l'équation aux rayons de courbure principaux de la surface.

Si dans l'équation (9) on fait $d\mu = 0$, elle fournira le rayon de courbure ρ de la ligne $\mu = \text{const.}$; ainsi l'on aura

$$\frac{\sqrt{LM - R^2}}{\rho\lambda} = \frac{l}{L}, \quad \frac{\sqrt{LM - R^2}}{\rho\mu} = \frac{m}{M}$$

ou

$$l = \frac{L\sqrt{LM - R^2}}{\rho\lambda}, \quad m = \frac{M\sqrt{LM - R^2}}{\rho\mu}.$$

Les ombilics s'obtiennent en exprimant que la formule (10) a des racines égales, ce qui donne

$$(Ml + Lm - 2Rr)^2 - 4(r^2 - lm)(R^2 - LM) = 0;$$

mais on les obtient plus facilement en posant $\frac{\rho}{\sqrt{LM - R^2}} = x$ dans (10), ce qui la transforme en

$$(rx - R)^2 - (lx - L)(mx - M) = 0.$$

Les racines de cette équation sont séparées par

$$-\infty, \quad \frac{L}{l}, \quad \frac{M}{m} \quad \text{et} \quad +\infty;$$

pour qu'elles soient égales, il faut que

$$\frac{L}{l} = \frac{M}{m} = \frac{R}{r}:$$

telles sont les équations des ombilics.

VIII. — Théorème de Gauss.

En vertu de (8), on peut écrire

$$lm - r^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda^2} \\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \cdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \cdots \end{vmatrix}^2;$$

effectuant les calculs par la règle de la multiplication des déterminants, on trouve

$$lm = \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2} & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 & \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2} & \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 \end{vmatrix},$$

$$r^2 = \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} \\ \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 & \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} \\ \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \sum \left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Or, en différentiant les formules (5), on a

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda} = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\mu} = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}, \\ \frac{\partial R}{\partial\lambda} = \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right), \\ \frac{\partial R}{\partial\mu} = \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right), \\ \text{d'où} \\ \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{\partial R}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu}, \\ \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{\partial R}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda}. \end{cases}$$

De ces formules, on tire encore par différentiation (des deux dernières)

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} + \sum \frac{\partial^3 x}{\partial\lambda^2\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{\partial^2 R}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2},$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} + \sum \frac{\partial^3 x}{\partial\mu^2\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{\partial^2 R}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2};$$

on a ensuite

$$\sum \frac{\partial^3 x}{\partial\lambda^2\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2},$$

$$\sum \frac{\partial^3 x}{\partial\mu^2\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2}.$$

De ces quatre formules on tire

$$(a)\qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} - \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 = \frac{\partial^2 R}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2};$$

les déterminants lm et r^2, ou plutôt leur différence, peut alors s'écrire

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda} & \frac{\partial R}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda} & L & R \\ \frac{\partial R}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} & R & M \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} & \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} & L & R \\ \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} & R & M \end{vmatrix}$$

ou encore, en vertu de (a),

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(LM - R^2)\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\right) \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda} & \frac{\partial R}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda} & L & R \\ \frac{\partial R}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} & R & M \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} & \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} & L & R \\ \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} & R & M \end{vmatrix} = lm - r^2. \end{aligned} \right.$$

Cette formule, dont la démonstration est peut-être un peu longue, montre que le produit des rayons de courbure prin-

cipaux $\frac{(LM - R^2)^{\frac{3}{2}}}{lm - r^2}$ ne dépend que des quantités L, M, R et de leurs dérivées; la quantité inverse $\frac{lm - r^2}{(LM - R^2)^{\frac{3}{2}}}$ est ce que l'on appelle, d'après Gauss, la *courbure totale* ou courbure sphérique de la surface; ainsi :

La courbure totale d'une surface est déterminée en chaque point, quand on connaît les quantités L, M, R, *qui permettent de mettre la différentielle d'un arc de courbe tracé sur la surface sous la forme*

$$ds = \sqrt{L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2},$$

résultat de la plus haute importance, comme on le verra.

IX. — Équation des lignes de courbure, des lignes conjuguées et des lignes asymptotiques.

Nous rappellerons que des lignes forment un réseau de *lignes conjuguées* quand elles peuvent se partager en deux séries, telles que toutes les courbes de la première série rencontrent celles de la seconde, de telle sorte que les tangentes, au point de croisement, soient des diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point. Elles deviennent *lignes asymptotiques* si les diamètres conjugués en question sont des asymptotes de l'indicatrice.

L'équation de l'indicatrice se trouve en observant que le carré u^2 de son rayon vecteur est égal au rayon de courbure ρ de la section normale correspondante; la formule (9) donne alors

$$\frac{\sqrt{LM - R^2}}{u^2} = \frac{l\,d\lambda^2 + 2r\,d\lambda\,d\mu + m\,d\mu^2}{L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2}$$

ou encore

$$(c) \qquad \sqrt{LM - R^2} = u^2\left[l\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + 2r\,\frac{d\lambda}{ds}\,\frac{d\mu}{ds} + m\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2\right].$$

Or, en prenant dans le plan tangent, pour axes de coordonnées, les tangentes aux lignes $\mu = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$, on a les formules de transformation de coordonnées

$$(d) \qquad \frac{X}{u} = \frac{\sqrt{L}\,d\lambda}{ds}, \qquad \frac{Y}{u} = \frac{\sqrt{M}\,d\mu}{ds},$$

la direction de u étant celle de ds. On tire de là

$$u\frac{d\lambda}{ds} = \frac{X}{\sqrt{L}}, \qquad u\frac{d\mu}{ds} = \frac{Y}{\sqrt{M}},$$

et (c) devient

$$(13) \qquad \sqrt{LM - R^2} = \frac{l}{L}X^2 + \frac{2rXY}{\sqrt{LM}} + \frac{m}{M}Y^2.$$

Cette équation prend une forme plus symétrique en observant que

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{LM}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{LM}} = \frac{\cos\theta}{R};$$

on a alors, en remplaçant $\sqrt{LM - R^2}$ par l'unité, ce qui n'altère que la dimension, mais non la forme de l'indicatrice,

$$1 = \frac{l}{L}X^2 + \frac{m}{M}Y^2 + \frac{2r}{R}XY\cos\theta.$$

Telle est l'équation de l'indicatrice.

Pour que deux directions, $\frac{Y}{X}$, $\frac{Y'}{X'}$, soient conjuguées, il faut que l'on ait

$$\frac{l}{L}XX' + \frac{2r}{\sqrt{LM}}(XY' + YX') + \frac{m}{M}YY' = 0$$

ou, en vertu de (d),

$$(14) \qquad l\,d\lambda\,\delta\lambda + 2r(d\lambda\,\delta\mu + d\mu\,\delta\lambda) + m\,d\mu\,\delta\mu = 0,$$

$\delta\lambda$, $\delta\mu$ désignant des différentielles relatives à la direction conjuguée de $d\lambda$, $d\mu$. Si l'on observe que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial x}{\partial\mu}d\mu,$$

$$\delta\,dx = \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}d\lambda\,\delta\lambda + \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}(d\lambda\,\delta\mu + d\mu\,\delta\lambda) + \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}d\mu\,\delta\mu,$$

la formule (14) pourra aussi se mettre sous la forme

$$(14\ bis)\qquad \begin{vmatrix} d\,\delta x & d\,\delta y & d\,\delta z \\ \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que les lignes $\lambda =$ const., $\mu =$ const. soient coordonnées conjuguées, il faut que (14) ou (14 *bis*) soient satisfaites pour $d\lambda = 0$, $\delta\mu = 0$ ou que

$$r = 0.$$

Ce résultat important que j'ai donné pour la première fois dans une note de mon *Traité de Mécanique* peut s'établir directement comme il suit :

Pour que les directions dx, dy, dz et δx, δy, δz soient conjuguées, il faut que

$$r\,\delta x\,dx + 2s(\delta x\,dy + \delta y\,dx) + t\,\delta y\,dy = 0,$$

et par suite, pour que les lignes coordonnées soient conjuguées, il faut que

$$(\alpha)\qquad r\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + s\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right) + t\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu} = 0;$$

or on a

$$\frac{\partial z}{\partial\lambda} = p\frac{\partial x}{\partial\lambda} + q\frac{\partial y}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\mu} = p\frac{\partial x}{\partial\mu} + q\frac{\partial y}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu} = p\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} + q\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \omega,$$

ω désignant le premier membre de (α). Si entre ces équations on élimine p, q en observant que, en vertu de (α), ω est nul, on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad r = 0.$$

C. Q. F. D.

La condition pour que les lignes coordonnées $\lambda =$ const., $\mu =$ const. soient lignes de courbure sera alors

$$r = 0, \qquad R = 0.$$

On peut d'ailleurs trouver les équations des lignes de courbure en adjoignant à l'équation (14) la condition

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\,d\mu\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\,\delta\mu\right) + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$L\,d\lambda\,\delta\lambda + R(d\lambda\,\delta\mu + d\mu\,\delta\lambda) + M\,d\mu\,\delta\mu = 0;$$

l'élimination de $\delta\lambda$, $\delta\mu$ entre cette équation et (14) donne l'équation des lignes de courbure

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &(l\,d\lambda + r\,d\mu)(R\,d\lambda + M\,d\mu)\\ &\quad -(L\,d\lambda + R\,d\mu)(r\,d\lambda + m\,d\mu) = 0\end{aligned}\right.$$

ou

$$(15\,bis)\quad (lR - Lr)d\lambda^2 + (lM - mL)d\lambda\,d\mu + (rM - Rm)d\mu^2 = 0.$$

Dans ses Leçons à la Sorbonne, M. Darboux met les équations des lignes de courbure sous une autre forme ; à cet effet, il observe que les équations de la normale à la surface en x, y, z peuvent se mettre sous la forme

$$(X - x)\frac{\partial x}{\partial \lambda} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

$$(X - x)\frac{\partial x}{\partial \mu} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial \mu} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0,$$

ou, en posant $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma^2$,

$$X\frac{\partial x}{\partial \lambda} + Y\frac{\partial y}{\partial \lambda} + Z\frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda} = 0,$$

$$X\frac{\partial x}{\partial \mu} + Y\frac{\partial y}{\partial \mu} + Z\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^2}{\partial \mu} = 0.$$

Pour avoir les lignes de courbure, il faut exprimer que cette droite rencontre celle qui lui est infiniment voisine ; en d'autres

termes, il faut éliminer X, Y, Z entre ces équations et leurs différentielles

$$X d\frac{\partial x}{\partial\lambda} + Y d\frac{\partial y}{\partial\lambda} + Z d\frac{\partial z}{\partial\lambda} - d\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda} = 0,$$

$$X d\frac{\partial x}{\partial\mu} + Y d\frac{\partial y}{\partial\mu} + Z d\frac{\partial z}{\partial\mu} - d\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda} = 0,$$

ce qui donne

$$(15\ ter)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} & \frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu} & \frac{\partial\sigma^2}{\partial\mu} \\ d\frac{\partial x}{\partial\lambda} & d\frac{\partial y}{\partial\lambda} & d\frac{\partial z}{\partial\lambda} & d\frac{\partial\sigma^2}{\partial\mu} \\ d\frac{\partial x}{\partial\mu} & d\frac{\partial y}{\partial\mu} & d\frac{\partial z}{\partial\mu} & d\frac{\partial\sigma^2}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour obtenir l'équation des asymptotiques, on peut exprimer que dans (14) les directions conjuguées $d\lambda$, $d\mu$ et $\delta\lambda$, $\delta\mu$ sont coïncidentes, ce qui donne

$$(16)\qquad l\,d\lambda^2 + 2r\,d\lambda\,d\mu + m\,d\mu^2 = 0$$

ou encore

$$(16\ bis)\qquad \begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z \\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

et, pour que les lignes coordonnées soient asymptotiques, il faut que $l = 0$, $m = 0$. J'ai également donné ces formules dans mon *Traité de Mécanique* (2e édition).

Remarque I. — On met souvent les équations de l'ellipsoïde sous la forme

$$x = a \sin\lambda \cos\mu,$$
$$y = b \sin\lambda \sin\mu,$$
$$z = c \cos\lambda;$$

il est facile de s'assurer que, dans ce cas, $r = 0$, c'est-à-dire que les lignes $\lambda =$ const., $\mu =$ const. sont conjuguées. Ce

qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement par des considérations de Géométrie pure.

Remarque II. — Si l'on considère la surface ayant pour équations

$$x = \varphi(\lambda) + \varphi_1(\mu), \qquad y = \chi(\lambda) + \chi_1(\mu), \qquad z = \psi(\lambda) + \psi_1(\mu),$$

les lignes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ seront sur cette surface des lignes conjuguées. La surface en question est d'ailleurs susceptible d'être engendrée par une courbe égale à $x = \varphi(\lambda)$, $y = \chi(\lambda)$, $z = \psi(\lambda)$ qui se déplace dans l'espace.

Remarque III. — La surface qui a pour équations

$$x = a\lambda + a', \qquad y = b\lambda + b', \qquad z = c\lambda + c',$$

a, a', b, b', c, c' désignant des fonctions de μ seul, a pour lignes asymptotiques les lignes $\mu = \text{const.}$; les autres lignes asymptotiques ont alors pour équation

$$2r\,d\lambda + m\,d\mu = 0;$$

cette équation contient λ au second degré, c'est une de celles que l'on sait intégrer quand on en a une solution.

La surface en question est engendrée par le mouvement d'une droite qui s'appuie sur la courbe

$$x = a', \qquad y = b', \qquad z = c'.$$

X. — Sur une forme remarquable des équations des lignes de courbure.

En général, la recherche des lignes asymptotiques est plus facile que celle des lignes de courbure, et, quand on connaît les lignes asymptotiques d'une surface, on peut quelquefois en déduire très simplement les lignes de courbure. Supposons, en effet, que l'on ait pris les lignes asymptotiques pour lignes coordonnées : l'équation (15) ou (15 *bis*) des lignes de courbure deviendra

$$L\,d\lambda^2 - M\,d\mu^2 = 0,$$

et cette équation se décompose immédiatement en deux autres

$$(\alpha) \qquad \sqrt{L}\,d\lambda \pm \sqrt{M}\,d\mu = 0;$$

si donc L est fonction de λ seul et M fonction de μ seul, le problème sera ramené à de simples quadratures. Cette circonstance se présente dans la recherche des lignes de courbure des surfaces du second ordre dont les génératrices rectilignes sont précisément les lignes asymptotiques.

Considérons, par exemple, l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

les génératrices ont pour équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\lambda + \cos\lambda,$$
$$\frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\lambda + \sin\lambda,$$

et

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin\mu + \cos\mu,$$
$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\mu + \sin\mu;$$

λ et μ ne sont autre chose que les anomalies excentriques de l'ellipse de gorge; $\lambda =$ const., $\mu =$ const. sont alors les équations en coordonnées curvilignes des asymptotiques, et l'on a

$$x = a\,\frac{\sin(\lambda+\mu)}{\sin\lambda+\sin\mu} = a\,\frac{\cos\frac{\lambda+\mu}{2}}{\cos\frac{\lambda-\mu}{2}},$$

$$y = b\,\frac{\sin(\lambda+\mu)}{\cos\lambda+\cos\mu} = b\,\frac{\sin\frac{\lambda+\mu}{2}}{\cos\frac{\lambda-\mu}{2}},$$

$$z = c\,\frac{\cos\mu-\cos\lambda}{\sin\lambda+\sin\mu} = c\,\frac{\sin\frac{\lambda-\mu}{2}}{\cos\frac{\lambda-\mu}{2}}.$$

On en déduit

$$L = \frac{a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu + c^2}{4 \cos^2 \frac{\lambda - \mu}{2}},$$

$$M = \frac{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda + c^2}{4 \cos^2 \frac{\lambda - \mu}{2}};$$

les équations (α) deviennent alors

$$d\lambda \sqrt{a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu + c^2} \pm d\mu \sqrt{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda + c^2} = 0.$$

Nous poserons

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2} = k^2;$$

l'équation précédente s'écrira alors

$$(\beta) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu}} = 0,$$

et l'équation finie des lignes de courbure sera

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} \pm \int \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu}} = \text{const.}$$

On a vu que cette formule pouvait être remplacée par une autre ne contenant plus trace de signes d'intégration ; l'équation (β) est en effet l'équation d'Euler, et nous avons vu (t. IV, p. 206) comment Lagrange était parvenu à l'intégrer sous forme algébrique. La solution, susceptible d'un grand nombre de formes, peut se mettre en particulier sous la forme suivante

$$\cos \lambda \cos \mu \mp \sin \lambda \sin \mu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 C} = \cos C,$$

C désignant une constante.

XI. — Lignes bissectrices.

On appelle *lignes bissectrices* celles qui partagent en deux parties égales les angles des lignes coordonnées : rien de plus

facile que de trouver leurs équations différentielles; il n'y a qu'à écrire que la projection faite parallèlement à la coordonnée λ de l'arc ds sur la coordonnée μ est égale à la projection du même arc sur la coordonnée λ ou est égale et de signe contraire à cette projection; on a ainsi

$$d\lambda\sqrt{L} \pm d\mu\sqrt{M} = 0.$$

Cette équation sera en particulier celle des lignes de courbure quand les lignes coordonnées seront les lignes asymptotiques, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe précédent.

Si, dans une surface de révolution, on prend les parallèles et les méridiens pour lignes coordonnées, il est facile de voir que l'équation qui donne ds^2 sera d'abord en coordonnées polaires

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\psi^2;$$

mais $r = \varphi(\theta)$: donc

$$ds^2 = [\varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)]\,d\theta^2 + \varphi^2(\theta)\sin^2\theta\,d\psi^2;$$

les lignes bissectrices ont donc pour équation

$$d\theta\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)} \pm d\psi\,\varphi(\theta)\sin\theta = 0$$

ou

$$\psi + \text{const.} = \pm\int d\theta\,\frac{\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)}}{\varphi(\theta)\sin\theta};$$

elles s'obtiendront donc par de simples quadratures. Ce sont d'ailleurs des loxodromies.

XII. — Équations des lignes géodésiques en coordonnées curvilignes.

Supposons que la ligne dont on demande l'équation ne soit pas la ligne $\mu = \text{const.}$; pour trouver son équation, comme elle est tracée sur la surface, il suffira d'exprimer que sa normale principale est normale à la direction $\frac{\partial x}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial\lambda}$; car,



étant normale à deux directions tracées sur la surface, elle sera normale à la surface. On aura ainsi

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0$$

ou, en abrégeant et en faisant usage d'accents pour représenter les dérivées relatives à l'arc,

$$\sum x''\frac{\partial x}{\partial\lambda}=0$$

ou bien

$$\frac{d}{ds}\sum x'\frac{\partial x}{\partial\lambda}-\sum x'\frac{d}{ds}\frac{\partial x}{\partial\lambda}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{ds}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\lambda'+\frac{\partial x}{\partial\mu}\mu'\right)\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\lambda'+\frac{\partial x}{\partial\mu}\mu'\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\lambda'+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\mu'\right);$$

en multipliant par 2, on a

$$(17)\qquad 2\frac{d}{ds}(L\lambda'+R\mu')=\frac{\partial L}{\partial\lambda}\lambda'^2+2\frac{\partial R}{\partial\lambda}\lambda'\mu'+\frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'^2.$$

Telle est la forme sous laquelle on peut présenter l'équation des lignes géodésiques; la suivante convient aussi :

$$(17\ bis)\qquad 2\frac{d}{ds}(R\lambda'+M\mu')=\frac{\partial L}{\partial\mu}\lambda'^2+2\frac{\partial R}{\partial\mu}\lambda'\mu'+\frac{\partial M}{\partial\mu}\mu'^2.$$

Si l'on appelle i l'angle que la ligne géodésique fait avec $\mu=$ const., on peut écrire ces équations ainsi

$$(18)\qquad 2\frac{d\sqrt{L}\cos i}{ds}=\frac{\partial L}{\partial\lambda}\lambda'^2+2\frac{\partial R}{\partial\lambda}\lambda'\mu'+\frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'^2,\qquad\ldots$$

La condition pour que $\lambda=$ const. soit géodésique est qu'en appelant s_λ l'arc de cette courbe, on ait

$$\sum\frac{\partial^2 x}{\partial s_\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}=0;$$

or $\frac{\partial^2 x}{\partial s_\lambda^2}$ est égal à $\frac{\partial^2 x\,\partial s_\lambda-\partial^2 s_\lambda\,\partial x}{\partial s_\lambda^3}$, on pourra donc écrire ainsi

l'équation précédente

$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial s_\lambda}{\partial\mu} - \frac{\partial^2 s_\lambda}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0$$

ou

$$\sum\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\sqrt{\mathrm{M}} - \sum\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\sqrt{\mathrm{M}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\lambda}\right) - \mathrm{R}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{M}}}{\partial\mu} = 0,$$

ou enfin

$$\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\lambda} - \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{M}}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mu} = 0.$$

On voit que, si les coordonnées sont orthogonales, $\lambda = $ const. ne sera ligne géodésique que si M est indépendant de λ; nous verrons bientôt qu'il est impossible que les deux lignes coordonnées orthogonales soient géodésiques (excepté sur les surfaces développables).

XIII. — Coordonnées de Gauss. Polygones géodésiques.

Gauss a fait un heureux usage d'un système particulier de coordonnées que nous allons définir. Les lignes $\lambda = $ const. sont des géodésiques issues d'un point fixe O, et les lignes $\mu = $ const. sont des cercles géodésiques ayant leurs centres géodésiques en O. On a ainsi un système orthogonal dans lequel l'une des lignes coordonnées est géodésique. Soit θ l'angle qu'une quelconque des lignes coordonnées géodésiques fait avec une géodésique fixe passant en O, et r la longueur de cette géodésique, comptée depuis le point O jusqu'au point M que l'on se propose de représenter; r et θ sont les coordonnées de ce point.

Le ds^2 est de la forme

$$(a) \qquad ds^2 = dr^2 + \mathrm{G}^2 d\theta^2;$$

car, pour $\theta = $ const., on doit avoir $dr = ds$, et, dans ds^2, il ne doit pas entrer de terme en $dr\,d\theta$. L'arc de cercle géodésique élémentaire qui est la valeur de ds estimée suivant la

ligne $r = \text{const.}$ est $G\,d\theta$. Dans ce cas, l'expression générale si compliquée de la courbure totale k donnée par la formule (12) se réduit à

$$(b) \qquad k = -\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2},$$

et l'équation (18) d'une géodésique à

$$2\frac{d\cos i}{ds} = 2G\frac{\partial G}{\partial r}\theta'^2,$$

ou

$$(c) \qquad \sin i\frac{di}{ds} = -G\frac{\partial G}{\partial r}\theta'^2.$$

Proposons-nous d'évaluer la courbure totale d'un triangle géodésique, c'est-à-dire formé par trois lignes géodésiques CA, CB et AB. Plaçons l'origine en C et prenons pour ligne coordonnée initiale le côté CA : la courbure totale cherchée K sera donnée par la formule

$$K = \int\int k\,d\Omega = \int\int k\,G\,d\theta\,dr$$

où $d\Omega$ désigne l'aire élémentaire; en vertu de (b), elle devient

$$K = -\int\int\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\,d\theta\,dr.$$

Intégrons par rapport à r, en observant que pour r infiniment petit $\frac{\partial G}{\partial r} = 1$; en effet, pour $r = 0$, on a $r\,d\theta = G\,d\theta$ ou $r = G$, $dr = dG$; nous aurons

$$K = \int\left(1 - \frac{\partial G}{\partial r}\right)d\theta;$$

mais l'équation (c) donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial r} &= -\sin i\frac{di}{ds}\frac{1}{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2}\\ &= -G\frac{d\theta}{ds}\frac{di}{ds}\frac{1}{G\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2} = -\frac{di}{ds}\frac{ds}{d\theta} = -\frac{di}{d\theta};\end{aligned}$$

donc

$$K = \int \left(1 + \frac{di}{d\theta}\right) d\theta = \int (d\theta + di),$$

Cette expression doit être intégrée de o à C; or l'intégrale de *di* donne la différence des valeurs de *i* en A et B : l'une de ces valeurs est A, l'autre $\pi - B$; on a donc

$$K = C + A + B - \pi;$$

on peut donc énoncer ce théorème très remarquable :

Théorème. — *La courbure totale d'un triangle géodésique est égale à l'excès de la somme de ses angles sur deux droits.*

Ou bien encore :

La somme des angles d'un triangle géodésique est égale à sa courbure augmentée de deux droits.

Par suite :

La somme des angles d'un polygone géodésique est égale à sa courbure plus autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux.

Dans un triangle infinitésimal, la courbure est infiniment petite du second ordre; donc, aux termes du second ordre près :

La somme des angles d'un triangle géodésique infinitésimal est égale à deux droits.

La somme des angles d'un triangle infinitésimal quelconque est de deux droits; mais ordinairement la différence avec deux droits est du premier ordre, tandis que, quand le triangle est géodésique, cette différence est, en réalité, du second ordre.

XIV. — Sur l'intégration des équations des lignes géodésiques.

L'équation (17)

$$(17) \qquad 2\frac{d}{ds}(L\lambda' + R\mu') = \frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda'^2 + 2\frac{\partial R}{\partial \lambda}\lambda'\mu' + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\mu'^2$$

peut se transformer et se ramener à la forme canonique; posons, en effet,

$$(\alpha) \qquad 2T = L\lambda'^2 + 2R\lambda'\mu' + M\mu'^2,$$

$$(\beta) \qquad \lambda_1 = L\lambda' + R\mu',$$

$$(\gamma) \qquad \mu_1 = R\lambda' + M\mu';$$

nous aurons

$$(\delta) \qquad \lambda_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda'}, \qquad \mu_1 = \frac{\partial T}{\partial \mu'};$$

nous tirons de (β) et (γ)

$$(\varepsilon) \qquad \lambda' = \frac{M\lambda_1 - R\mu_1}{LM - R^2}, \qquad \mu' = \frac{L\mu_1 - R\lambda_1}{LM - R^2},$$

$$(\zeta) \qquad 2T = \frac{1}{LM - R^2}(M\lambda_1^2 - 2R\lambda_1\mu_1 + L\mu_1^2).$$

En vertu des formules (β) et (α), (17) pourra s'écrire

$$(\theta) \qquad \frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{\partial T}{\partial \lambda}.$$

Ceci posé, la lettre ∂ désignant jusqu'ici une dérivée prise en considérant λ, μ, λ', μ' comme des variables indépendantes, servons-nous de la lettre δ pour représenter une dérivée prise dans l'hypothèse où λ, μ, λ_1, μ_1 seraient variables indépendantes : la fonction T étant homogène et du second degré en λ' et μ', on aura, en vertu de (β) et (γ),

$$2T = \lambda'\lambda_1 + \mu'\mu_1$$

ou

$$T = -T + \lambda'\lambda_1 + \mu'\mu_1$$

donnant alors à λ, λ_1, μ, μ_1 des accroissements arbitraires $d\lambda$, $d\lambda_1$, ...; λ' et μ' prendront les accroissements $d\lambda'$, $d\mu'$; la formule précédente donnera,

$$dT = -\left(\frac{\partial T}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial T}{\partial\mu}\,d\mu + \frac{\partial T}{\partial\lambda'}\,d\lambda' + \frac{\partial T}{\partial\mu'}\,d\mu'\right) + \lambda' d\lambda_1 + \mu' d\mu_1 + \lambda_1 d\lambda' + \mu_1 d\mu'$$

et, en ayant égard à (δ),

$$dT = -\frac{\partial T}{\partial\lambda}\,d\lambda - \frac{\partial T}{\partial\mu}\,d\mu + \lambda' d\lambda_1 + \mu' d\mu_1.$$

Cette formule exprime que l'on a

$$(\varpi)\qquad \frac{\delta T}{\delta\lambda} = -\frac{\partial T}{\partial\lambda}, \qquad \frac{\delta T}{\delta\mu} = -\frac{\partial T}{\partial\mu},$$

$$(\rho)\qquad \frac{\delta T}{\delta\lambda_1} = \lambda' = \frac{d\lambda}{ds}, \qquad \frac{\delta T}{\delta\mu_1} = \mu' = \frac{d\mu}{ds}.$$

La formule (θ) et celle que l'on en déduit en changeant λ en μ peuvent s'écrire comme il suit, en vertu de (ϖ); nous les faisons suivre des équations (ρ),

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{ds} = -\dfrac{\delta T}{\delta\lambda}, & \dfrac{d\mu_1}{ds} = -\dfrac{\delta T}{\delta\mu}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{ds} = \dfrac{\delta T}{\delta\lambda_1}, & \dfrac{d\mu}{ds} = \dfrac{\delta T}{\delta\mu_1}. \end{cases}$$

Telles sont les équations des lignes géodésiques ramenées à la forme canonique : T est d'ailleurs donné par la formule (ζ). Si l'on remplace dans cette formule (ζ) λ_1 et μ_1 par $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial\mu}$ et si l'on égale à $2h$ la valeur de $2T$ ainsi transformée, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(20)\qquad 2h(LM - R^2) = M\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 - 2R\,\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\theta}{\partial\mu} + L\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2,$$

et, si l'on connaît une intégrale complète de cette équation,

c'est-à-dire ici renfermant une constante arbitraire α, les équations finies des lignes géodésiques seront

$$(20\,bis)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \text{const.}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial h} = s + \text{const.}$$

Il y a un cas très étendu dans lequel on pourra toujours effectuer l'intégration.

Supposons que l'on ait pu prendre $R = 0$, $L = M = \Lambda$, la formule (20) devient

$$(\sigma)\qquad 2h\Lambda = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2;$$

s'il arrive alors que $\Lambda = \varphi(\lambda) + \psi(\mu)$, on pourra prendre

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 = 2h\varphi(\lambda) + \alpha,$$
$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2 = 2h\psi(\mu) - \alpha;$$

la formule (σ) sera alors satisfaite, et l'on aura

$$\theta = \int\sqrt{2h\varphi(\lambda) + \alpha}\,d\lambda + \int\sqrt{2h\psi(\mu) - \alpha}\,d\mu.$$

On connaît ainsi une solution complète de (σ), d'où l'on conclut l'équation des lignes géodésiques

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \beta, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial h} = s + \gamma,$$

β et γ désignant deux constantes.

A ce cas examiné par Liouville, on peut en ajouter un autre : c'est celui où R serait de la forme

$$\Lambda = \varphi'(\lambda)\psi'(\mu);$$

en supposant $L = 0$, $M = 0$, $R = \Lambda$, l'équation (20) deviendrait

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial\mu} = h\varphi'(\lambda)\psi'(\mu).$$

Posant alors

$$\theta = \Phi(\lambda)\Psi(\mu),$$

on aurait à déterminer Φ et Ψ par la relation

$$\Phi(\lambda)\Psi(\mu)\Phi'(\lambda)\Psi'(\mu)=h\varphi'(\lambda)\psi'(\mu);$$

on prendrait alors

$$\Phi'(\lambda)\Phi(\lambda)=h\varphi'(\lambda),$$
$$\Psi'(\mu)\Psi(\mu)=\psi(\mu),$$

d'où

$$\Phi(\lambda)=\sqrt{2h\varphi(\lambda)+\alpha},$$
$$\Psi(\mu)=\sqrt{2\psi(\mu)},$$

et, par suite,

$$\theta=\sqrt{[2h\varphi(\lambda)+\alpha]2\psi(\mu)}.$$

Nous allons appliquer ces considérations à la recherche des lignes géodésiques des surfaces de révolution. Les méridiens et les parallèles formant un système orthogonal, nous les prendrons pour lignes coordonnées. L'équation des surfaces de révolution est de la forme

$$z=\varphi(x^2+y^2);$$

nous pouvons poser

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad z=\varphi(r);$$

nous en tirons

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial r}=\varphi'(r),$$
$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0.$$

Les quantités désignées par L, M, R sont ici

$$1+\varphi'^2(r),\quad r^2,\quad 0;$$

on a donc

$$ds^2=(1+\varphi'^2)dr^2+r^2d\theta^2,$$
$$2T=(1+\varphi'^2)r'^2+r^2\theta'^2,$$

et, en appelant r_1, θ_1 les dérivées de T par rapport à r' et θ',

$$r_1=(1+\varphi'^2)r',\qquad \theta_1=r^2\theta',$$

on en conclut

$$2T=\frac{r_1^2}{1+\varphi'^2}+\frac{\theta_1^2}{r^2}.$$

L'équation aux dérivées partielles d'où dépend la solution du problème est donc

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)^2 \frac{1}{1+\varphi'^2} + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)^2 \frac{1}{r^2} = 2h,$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)^2 \frac{r^2}{1+\varphi'^2} + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)^2 = 2hr^2;$$

on obtient une solution complète en posant

$$\Theta = \int \sqrt{2h(1+\varphi'^2) - 2\alpha\frac{1+\varphi'^2}{r^2}}\, dr + \sqrt{2\alpha}\,\theta,$$

et les équations des lignes géodésiques deviennent

$$\frac{\theta}{\sqrt{2\alpha}} - \int \frac{(1+\varphi'^2)\,dr}{r^2\sqrt{2h(1+\varphi'^2) - 2\alpha\frac{1+\varphi'^2}{r^2}}} = \beta,$$

$$\int \frac{(1+\varphi'^2)\,dr}{\sqrt{2h(1+\varphi'^2) - 2\alpha\frac{1+\varphi'^2}{r^2}}} = s + \gamma,$$

ou en ne considérant que la première, la seule importante, la seconde ne faisant connaître que l'arc s,

$$\frac{\theta}{\sqrt{2\alpha}} - \int \frac{(1+\varphi'^2)\,dr}{\sqrt{2h(1+\varphi'^2)r^4 - 2\alpha r^2(1+\varphi'^2)}} = \beta$$

ou bien

$$\frac{\theta}{\sqrt{2\alpha}} - \int \sqrt{\frac{1+\varphi'^2}{2hr^2 - 2\alpha}}\,\frac{dr}{r} = \beta.$$

Dans la sphère de rayon a, on a $\varphi(r) = \sqrt{a^2 - r^2}$; les équations des géodésiques deviennent alors, en changeant la constante β,

$$\frac{\theta - \theta_0}{a\sqrt{2\alpha}} = \int \frac{dr}{r}\,\frac{1}{\sqrt{(a^2 - r^2)(2hr^2 - 2\alpha)}}.$$

Nous pouvons écrire cette équation ainsi

$$\frac{a(\theta-\theta_0)}{\sqrt{2\alpha g}} = \int \frac{dr}{r^2}\left(\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}+\sqrt{a^2-r^2}\right)\frac{1}{\sqrt{g\,\dfrac{2hr^2-2\alpha}{r^2}}},$$

en introduisant un facteur indéterminé $\sqrt{g}$. On peut disposer de g et de k, de telle sorte que

$$\frac{2ghr^2-2\alpha g}{r^2} = 1-k^2\frac{a^2-r^2}{r^2},$$

quel que soit r; il suffit pour cela de faire l'identification des deux membres, après avoir chassé le dénominateur r^2. L'équation des lignes géodésiques devient ainsi

$$\frac{ak(\theta-\theta_0)}{\sqrt{2\alpha g}} = \int \frac{dk\,\dfrac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}}{\sqrt{1-k^2\dfrac{a^2-r^2}{r^2}}}.$$

D'ailleurs k et g sont déterminés par les formules

$$2gh-k^2=1, \qquad 2\alpha g = a^2k^2;$$

la formule précédente peut alors s'écrire

$$(\theta-\theta_0) = \arcsin k\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}$$

ou

$$k\sqrt{a^2-r^2} = r\sin(\theta-\theta_0);$$

si l'on fait alors $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=\sqrt{a^2-r^2}$, on trouve

$$kz = -x\sin\theta_0+y\cos\theta_0:$$

c'est l'équation d'un grand cercle quelconque.

Sur une surface développable, on peut prendre $M=L=1$, $R=0$. L'équation aux dérivées partielles devient

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2 = 2h,$$

d'où l'on conclut

$$\theta = \lambda\sqrt{2h\lambda - 2\alpha\lambda} + \mu\sqrt{2\alpha\mu};$$

l'intégrale des lignes géodésiques est

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2h-2\alpha}} + \frac{\mu}{\sqrt{2\alpha}} = \text{const.} :$$

c'est une équation quelconque du premier degré, ce qui s'explique en observant que les lignes géodésiques se transforment en lignes droites dans le développement de la surface.

XV. — Étude d'une surface remarquable.

Parmi les surfaces, il y a lieu de distinguer celles dans lesquelles les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires et que nous avons rencontrées dans le calcul des variations. On peut en trouver les équations d'une manière très simple en observant que l'indicatrice est une hyperbole équilatère : alors, si l'on prend les lignes de longueur nulle pour lignes coordonnées, on aura

$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{M} = 0, \qquad r = 0.$$

Cette dernière, qui exprime que les lignes coordonnées sont conjuguées (puisqu'elles forment un faisceau harmonique avec les asymptotiques), peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial(y, z)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial(z, x)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)} = 0;$$

en différentiant les deux autres, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial z}{\partial\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial z}{\partial\mu} = 0;$$

d'où l'on tire

$$(\theta) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 0,$$

à moins que le déterminant $LM - R^2$ ne soit nul, auquel cas la surface serait une développable isotrope. Les équations (θ) donnent

$$(\delta) \quad x = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\mu), \quad y = \chi_1(\lambda) + \chi_2(\mu), \quad z = \psi_1(\lambda) + \psi_2(\mu),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2, \psi_1, \psi_2$ étant assujettis à satisfaire aux équations $L = 0$, $M = 0$, c'est-à-dire

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} \varphi_1'^2 + \chi_1'^2 + \psi_1'^2 = 0, \\ \varphi_2'^2 + \chi_2'^2 + \psi_2'^2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on prend $\varphi_1(\lambda) = \alpha$, $\varphi_2(\mu) = \beta$, on aura la solution sous la forme donnée par Monge

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta, \\ y &= f(\alpha) + F(\beta), \\ z &= \sqrt{-1}\left(\int \sqrt{1 + f'^2}\, d\alpha + \int \sqrt{1 + F'^2}\, d\beta\right), \end{aligned}$$

d'où il paraît difficile de déduire des solutions réelles. Voici une autre solution due à M. Weierstrass. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_1' + \chi_1'\sqrt{-1} &= -u\psi_1', \\ \varphi_1' - \chi_1'\sqrt{-1} &= \frac{\psi_1'}{u}; \end{aligned}$$

la première formule (ε) sera satisfaite, et l'on aura

$$\frac{\varphi_1'}{1 - u^2} = \frac{\chi_1'}{\sqrt{-1}(1 + u^2)} = \frac{\psi_1'}{2u};$$

si l'on égale cette suite de rapports à $\frac{1}{2}\theta'''(u)\frac{du}{d\lambda}$, on aura

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\theta'''(u)\, du, \\ \chi_1 &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\int (1 + u^2)\theta'''(u)\, du, \\ \psi_1 &= \int u\theta'''(u)\, du. \end{aligned}$$

Si l'on effectue les intégrations, on trouve

$$\varphi_1 = \frac{1-u^2}{2}\theta''(u) + u\theta'(u) - \theta(u),$$

$$\chi_1 = \sqrt{-1}\left[\frac{1+u^2}{2}\theta''(u) - u\theta'(u) + \theta(u)\right],$$

$$\psi_1 = u\theta''(u) - \theta'(u);$$

on satisfait de même à la seconde formule (ε) en posant

$$\varphi'_2 - \sqrt{-1}\chi'_2 = -v\chi'_2,$$

$$\varphi'_2 + \sqrt{-1}\chi'_2 = \frac{\psi'_2}{v},$$

et l'on trouve

$$\varphi_2 = \frac{1-v^2}{2}\eta''(v) + v\eta'(v) - \eta(v),$$

$$\chi_2 = -\sqrt{-1}\left[\frac{1+v^2}{2}\eta''(v) - v\eta'(v) + \eta(v)\right],$$

$$\psi_2 = v\eta''(\eta) - \eta'(v);$$

et les quantités

$$x = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad y = \chi_1 + \chi_2, \qquad z = \psi_1 + \psi_2$$

seront réelles si l'on prend

$$u = \xi + \eta\sqrt{-1}, \qquad v = \xi - \eta\sqrt{-1},$$

$$\theta(u) = F(\xi + \eta\sqrt{-1}), \qquad \eta(v) = F(\xi - \eta\sqrt{-1});$$

alors $\theta(u)$ et $\eta(v)$ seront des imaginaires conjuguées. Pour plus de détails sur les surfaces dont il s'agit, nous renverrons aux Leçons de M. Darboux *Sur la théorie générale des surfaces,* et au Mémoire de M. Ribaucour *Sur les élassoïdes,* qui a remporté le prix à l'Académie de Belgique, le 16 décembre 1880.

Nous ferons observer que, si la fonction $F(\xi + \eta\sqrt{-1})$ est algébrique, la surface que l'on obtient est elle-même algébrique, ce qui montre que, parmi les surfaces à courbure totale nulle, il y en a d'algébriques.

XVI. — Sur une classe particulière de géodésiques.

Sur toute surface, il existe une classe particulière de géodésiques, que l'on peut trouver quand on est parvenu à mettre l'équation qui donne ds^2 sous la forme

$$(\alpha) \qquad ds^2 = \Lambda(d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Pour trouver les lignes géodésiques, il suffit alors de trouver une solution complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\Lambda}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2\right] = 2h.$$

Si l'on suppose $h = 0$, cette équation s'intègre, quel que soit Λ, et il suffit de poser pour cela

$$\theta = a\lambda + b\mu + c,$$

pourvu que $a^2 + b^2 = 0$ ou $b = \pm a\sqrt{-1}$; ainsi, en prenant

$$\theta = a(\lambda \pm \mu\sqrt{-1}),$$

les équations des lignes géodésiques seront

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad \lambda \pm \mu\sqrt{-1} = \text{const.};$$

leur équation différentielle est $d\lambda \pm d\mu\sqrt{-1} = 0$ ou bien

$$d\lambda^2 + d\mu^2 = 0.$$

Pour ces lignes, on a $\Lambda(d\lambda^2 + d\mu^2) = 0$ ou $ds^2 = 0$, en vertu de (α). Ce sont, comme l'on voit, des lignes de longueur nulle.

On voit que dans la surface étudiée au paragraphe précédent les lignes coordonnées sont géodésiques.

XVII. — Courbes harmoniques.

Lorsque deux familles de courbes sont telles qu'en leurs points de croisement leurs tangentes forment un faisceau harmonique avec les tangentes aux lignes coordonnées, on dit qu'elles sont *conjuguées harmoniques*.

Si ds désigne l'élément linéaire d'une courbe, δs l'élément linéaire de sa conjuguée, les projections de ces éléments sur le plan des xy devront former un faisceau harmonique avec les projections des éléments des lignes coordonnées; on devra donc avoir

$$\frac{\dfrac{\delta y}{\delta x} - \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} : \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}}{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} : \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}} : \frac{\dfrac{\delta y}{\delta x} - \dfrac{\partial y}{\partial\mu} : \dfrac{\partial x}{\partial\mu}}{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\partial y}{\partial\mu} : \dfrac{\partial x}{\partial\mu}} = -1,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\delta y \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} - \delta x \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}}{\delta y \dfrac{\partial x}{\partial\mu} - \delta x \dfrac{\partial y}{\partial\mu}} + \frac{dy \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} - dx \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}}{dy \dfrac{\partial x}{\partial\mu} - dx \dfrac{\partial y}{\partial\mu}} = 0;$$

si l'on remplace δx par $\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\delta\lambda + \dfrac{\partial x}{\partial\mu}\delta\mu, \ldots$, on trouve ce que l'on pouvait prévoir

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{\delta\lambda}{\delta\mu}.$$

Théorème I. — *Les lignes de courbure sont conjuguées harmoniques des lignes de longueur nulle.*

En effet, si l'on prend les lignes de longueur nulle pour lignes coordonnées, on a $L = 0$, $M = 0$,

$$ds^2 = R\, d\lambda\, d\mu.$$

Quant à l'équation des lignes de courbure, elle devient

$$l\, d\lambda^2 - m\, d\mu^2 = 0$$

et se décompose en

$$\sqrt{l}\,d\lambda - \sqrt{m}\,d\mu = 0, \qquad \sqrt{l}\,d\lambda + \sqrt{m}\,d\mu = 0;$$

de ces deux équations, on tire des valeurs de $\frac{d\lambda}{d\mu}$ égales et de signes contraires, ce qui démontre la proposition énoncée.

L'équation des asymptotiques prend la forme

$$l\,d\lambda^2 + m\,d\mu^2 = 0,$$

quand $r = 0$, c'est-à-dire quand les lignes coordonnées sont conjuguées; elles sont donc conjuguées harmoniques, ce que 'on devait prévoir.

XVIII. — Composantes de la courbure.

Nous considérerons la courbure $\frac{1}{\rho}$ d'une courbe, en un point M de cette courbe, comme représentée par une droite dirigée suivant la normale principale; sur cette droite, à partir du point de contact, vers le centre de courbure, on compte la longueur $\frac{1}{\rho}$.

La courbure $\frac{1}{\rho}$, à ce point de vue, peut donc être décomposée en d'autres dirigées suivant des droites données; ses projections sur les axes sont $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$.

Considérons une courbe tracée sur une surface : si l'on décompose sa courbure en deux droites dirigées, l'une suivant la normale à la surface, l'autre suivant une tangente, la première de ces droites sera la *courbure normale*, la seconde sera la *courbure tangentielle* ou *géodésique*.

Soit θ l'angle que fait le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface : sa courbure tangentielle ou géodésique sera

$$\frac{\cos\theta}{\rho},$$

et la courbure normale

$$\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

La première est nulle dans les courbes géodésiques et la seconde dans les lignes asymptotiques. Nous allons voir tout à l'heure la raison pour laquelle la courbure tangentielle a reçu le nom de *courbure géodésique*.

XIX. — Sur la courbure tangentielle ou géodésique.

LEMME. — *Soient* R *et* R′ *les rayons de courbure de deux courbes* AB, AB′ *tangentes en* A. *Si l'on prend sur ces deux courbes des longueurs* AB, AB′ *égales à ds, les tangentes en* B *et* B′ *à ces courbes feront un angle dω donné par la formule*

$$(a) \qquad d\omega^2 = \frac{ds^2}{R^2} + \frac{ds^2}{R'^2} - 2\frac{ds}{R}\frac{ds}{R'}\cos(R, R').$$

En effet, si l'on mène, par un point O de l'espace Oa parallèle à la tangente commune en A, Ob et Ob' parallèles aux tangentes en B et B′, si sur ces tangentes on prend

$$Ob = Ob' = Oa = 1$$

dans le triangle abb', on aura

$$(b) \qquad ab = \frac{ds}{R}, \qquad ab' = \frac{ds}{R'}, \qquad bb' = d\omega,$$

et la formule

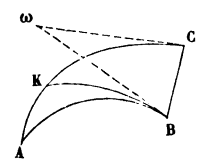
$$\overline{bb'}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ab'}^2 - 2\overline{ab}\,\overline{ab'}\cos(ab, ab')$$

donnera la relation (a), si l'on y remplace ab, ab', bb' par leurs valeurs (b), et si l'on observe que ab, ab' sont parallèles aux rayons de courbure R et R′.

Maintenant considérons une courbe quelconque AB tracée

sur une surface : par les points A et B infiniment voisins, menons des arcs de géodésiques tangents AKC et BK; l'angle CKB sera l'angle de contingence géodésique; en l'appelant ε et en posant $AB = ds$, le rapport $\frac{\varepsilon}{ds}$ sera la *courbure géodé-*

Fig. 6.



sique au point A. En effet, prenons $AC = AB$; l'angle des tangentes en B et C à AB et à AC sera donné par la formule

$$\omega = ds\left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2}{RR'}\cos(R, R')\right]^{\frac{1}{2}};$$

mais, par le théorème de Meusnier, la géodésique ayant son plan osculateur normal à la surface, si l'on appelle θ l'angle que le plan osculateur de AB fait avec le plan tangent, on aura $R' = \frac{R}{\sin\theta}$ et, par suite,

$$(a) \qquad \omega = \frac{ds\cos\theta}{R}.$$

En général, les tangentes en B et C ne se rencontreront pas; mais, si l'on suppose que la *fig.* 6 soit une projection sur le plan tangent à la surface en ω, les angles ne différeront de leurs projections que par des termes du second ordre et, à ces termes près, on aura

$$(b) \qquad \omega + \omega BC + BC\omega = \pi;$$

dans le triangle géodésique KCB, on aura aussi, aux termes du second ordre près,

$$K + KBC + BCK = \pi$$

ou

$$\varepsilon + \omega BC + BC\omega = \pi;$$

de cette formule et de (b) on tire

$$\omega = \varepsilon;$$

on a donc, en vertu de (a),

$$\varepsilon = \frac{ds \cos\theta}{R}$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{\cos\theta}{R},$$

ce qui prouve le théorème que nous avons énoncé, et ce qui justifie la dénomination de courbure géodésique donnée par Liouville à la courbure tangentielle.

On a encore donné à la courbure tangentielle le nom de *courbure de développement ;* cette dénomination est justifiée par le théorème suivant :

La courbure tangentielle d'une courbe est égale à la courbure de la transformée de celle-ci quand on la suppose tracée sur une développable dont elle serait la courbe de contact avec la surface proposée, quand on étale cette surface développable sur un plan.

En effet, la courbure géodésique d'une courbe tracée sur une développable est égale à la courbure propre de sa transformée plane ; pour établir ce fait, il suffit d'observer que les géodésiques d'une développable ont pour transformées des droites ; l'angle de contingence géodésique se transforme donc dans l'angle de contingence de la transformée plane, et, comme l'arc ne change pas de longueur après sa transformation, ceci démontre le fait énoncé ; mais la courbure géodésique d'une courbe est la même par rapport à toutes les surfaces circonscrites dont elle est la courbe de contact ; donc, etc.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *La courbe* C *tracée sur une surface* S, *et dont la courbure géodésique est constante, peut être trouvée comme il suit. Si l'on circonscrit suivant cette*

courbe C à la surface S une développable D et que l'on étale cette développable sur un plan, la transformée de la courbe C sera une courbe de courbure constante, c'est-à-dire un cercle.

L'équation différentielle de la courbe qui nous occupe est du second ordre et, en général, difficile à intégrer.

XX. — Courbures tangentielles en coordonnées curvilignes.

La courbure tangentielle joue un rôle important dans la théorie des coordonnées curvilignes : nous allons en calculer l'expression.

Il est clair que le cosinus de l'angle θ que le plan osculateur fait avec le plan tangent est égal au cosinus de celui que la normale principale fait avec la normale à la courbe située dans le plan tangent. Les cosinus directeurs de la première droite sont

$$\rho \frac{d^2 x}{ds^2}, \qquad \rho \frac{d^2 y}{ds^2}, \qquad \rho \frac{d^2 z}{ds^2},$$

ceux de la seconde sont

$$\frac{1}{\sqrt{LM - R^2}} \left(p' \frac{dz}{ds} - p'' \frac{dy}{ds}\right), \qquad \ldots;$$

on a donc

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{LM - R^2}} \begin{vmatrix} \frac{d^2 x}{ds^2} & \frac{d^2 y}{ds^2} & \frac{d^2 z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ p & p' & p'' \end{vmatrix}.$$

Or on a

$$1 = \frac{1}{LM - R^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \\ p & p' & p'' \end{vmatrix};$$

multipliant ces formules membre à membre, on a

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{(LM - R^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} & \sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \sum \frac{d^2x}{ds^2} p \\ \sum \frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial\lambda} & \sum \frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \sum \frac{dx}{ds} p \\ \sum p\frac{\partial x}{\partial\lambda} & \sum p\frac{\partial x}{\partial\mu} & \sum p^2 \end{vmatrix}$$

ou bien, en observant que les deux premiers éléments de la dernière ligne du déterminant sont nuls,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \sqrt{LM - R^2}\,\dfrac{\cos\theta}{\rho} = & \sum \dfrac{d^2x}{ds^2}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\sum\dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial x}{\partial\mu} \\ & -\sum \dfrac{d^2x}{ds^2}\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\sum\dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}. \end{cases}$$

Développons $\frac{d^2x}{ds^2}$ et $\frac{dx}{ds}$ suivant les puissances et les produits de $\frac{d\lambda}{ds} = \lambda'$ et $\frac{d\mu}{ds} = \mu'$, et faisons attention aux identités

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda},$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{\partial R}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu}, \quad \ldots;$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \sqrt{LM - R^2}\,\frac{\cos\theta}{\rho} = \lambda'^2 \Big[& \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda}(\lambda' R + \mu' M) \\ & + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} - \frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)(\lambda' L + \mu' R)\Big] \\ & + \lambda'\mu'\left[\frac{\partial L}{\partial\mu}(\lambda' R + \mu' M) - \frac{\partial M}{\partial\lambda}(\lambda' L + \mu' R)\right] \\ & + \mu'^2\Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\mu}(\lambda' L + \mu' R) \\ & - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} - \frac{\partial R}{\partial\mu}\right)(\lambda' R + \mu' M)\Big] \\ & + (\lambda''\mu' - \mu''\lambda')(LM - R^2). \end{aligned}$$

Telle est l'expression de la courbure géodésique ; on voit que :

La courbure géodésique est une fonction des seules quantités L, M, R, *de leurs dérivées et de* λ', μ', λ'', μ''.

On peut déduire de la formule précédente les courbures géodésiques des lignes coordonnées $\mu = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$ que nous désignerons par $\frac{\cos\theta_\lambda}{\rho_\lambda}$, $\frac{\cos\theta_\mu}{\rho_\mu}$; on trouve

$$\sqrt{LM - R^2}\,\frac{\cos\theta_\lambda}{\rho_\lambda} = \frac{R}{2L\sqrt{L}}\,\frac{\partial L}{\partial\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{L}}\,\frac{\partial L}{\partial\mu} - \frac{1}{\sqrt{L}}\,\frac{\partial R}{\partial\lambda},$$

$$\sqrt{LM - R^2}\,\frac{\cos\theta_\mu}{\rho_\mu} = \frac{R}{2M\sqrt{M}}\,\frac{\partial M}{\partial\mu} + \frac{1}{2\sqrt{M}}\,\frac{\partial M}{\partial\lambda} - \frac{1}{\sqrt{M}}\,\frac{\partial R}{\partial\mu}.$$

On peut déduire de là un théorème important, parce qu'il peut éviter au calculateur des recherches infructueuses, et qui peut s'énoncer comme il suit :

Théorème. — *On ne peut pas, en général, tracer sur une surface donnée deux systèmes de lignes géodésiques qui soient orthogonales, à moins que cette surface ne soit développable.*

En effet, si l'on suppose $R = 0$, $\frac{\cos\theta_\lambda}{\rho_\lambda} = 0$ et $\frac{\cos\theta_\mu}{\rho_\mu} = 0$, les formules précédentes deviennent

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial\lambda} = 0;$$

la fonction L ne contient donc pas μ, et la fonction M ne contient pas λ; il en résulte que l'on peut représenter le carré d'un arc ds^2 tracé sur la surface par une formule telle que

$$ds^2 = f(\lambda)\,d\lambda^2 + f_1(\mu)\,d\mu^2,$$

ou même par un changement de coordonnées

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2.$$

Si l'on calcule alors la courbure totale K de la surface, on trouve $K = 0$, relation qui ne peut avoir lieu que pour une surface développable, puisqu'un rayon de courbure principal doit être infini (p. 101).

XXI. — Nouvelle expression de la courbure géodésique.

La formule (α) du paragraphe précédent

$$(\alpha)\quad \sqrt{LM - R^2}\,\frac{\cos\theta}{\rho} = \sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\sum\frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial\mu} - \sum\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}\sum\frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial\lambda}$$

peut s'écrire comme il suit : en appelant i et j les angles que fait ds avec les lignes coordonnées, on a

$$\begin{aligned}\sum\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} &= \frac{d}{ds}\sum\frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial\lambda} - \sum\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\\ &= \frac{d\sqrt{L}\cos i}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\lambda'^2 + 2\frac{\partial R}{\partial\lambda}\lambda'\mu' + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'^2\right)\end{aligned}$$

et

$$\sum\frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \sqrt{M}\cos j, \quad \ldots;$$

donc (α) devient

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned}&\sqrt{LM - R^2}\,\frac{\cos\theta}{\rho}\\ &= \sqrt{M}\cos j\left[\frac{d\sqrt{L}\cos i}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\lambda'^2 + 2\frac{\partial R}{\partial\lambda}\lambda'\mu' + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'^2\right)\right]\\ &\quad - \sqrt{L}\cos i\left[\frac{d\sqrt{M}\cos j}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial\mu}\lambda'^2 + 2\frac{\partial R}{\partial\mu}\lambda'\mu' + \frac{\partial M}{\partial\mu}\mu'^2\right)\right].\end{aligned}\right.$$

On remarquera que les coefficients de $\sqrt{M}\cos j$ et $\sqrt{L}\cos i$ sont les premiers membres des équations des lignes géodésiques.

Cette formule se simplifie en supposant les coordonnées orthogonales. Alors $R = 0$, $j = \frac{\pi}{2} - i$, et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{\rho} = &\ \frac{1}{\sqrt{L}}\sin i\left(\frac{d\sqrt{L}\cos i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda}\lambda'^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'^2\right)\\ &- \frac{1}{\sqrt{M}}\cos i\left(\frac{d\sqrt{M}\sin i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu}\lambda'^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\mu}\mu'^2\right).\end{aligned}$$

Effectuons la différentiation indiquée et observons que l'on a

$$\cos i = \sqrt{L}\lambda', \qquad \sin i = \sqrt{M}\mu';$$

nous aurons

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{di}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu}\lambda'\left(\mu'^2\sqrt{\frac{M}{L}} + \lambda'^2\sqrt{\frac{L}{M}}\right)\\ -\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'\left(\mu'^2\sqrt{\frac{M}{L}} + \lambda'^2\sqrt{\frac{L}{M}}\right).\end{aligned}\right.$$

Or $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$; donc

$$L\lambda'^2 + M\mu'^2 = 1$$

et, en divisant par $\sqrt{LM}$,

$$\sqrt{\frac{L}{M}}\lambda'^2 + \sqrt{\frac{M}{L}}\mu'^2 = \frac{1}{\sqrt{LM}};$$

l'équation (γ) devient alors

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{di}{ds} + \frac{1}{2\sqrt{LM}}\left(\frac{\partial L}{\partial\mu}\lambda' - \frac{\partial M}{\partial\lambda}\mu'\right).$$

Faisons successivement $i = 0$, $i = \frac{\pi}{2}$, et appelons $\frac{1}{\gamma}$ la courbure géodésique de la ligne ds; appelons $\frac{1}{\gamma\lambda}$ et $\frac{1}{\gamma\mu}$ les courbures géodésiques des lignes coordonnées; nous aurons

$$\frac{1}{\gamma\lambda} = \frac{1}{2L\sqrt{M}}\frac{\partial L}{\partial\mu}, \qquad \frac{1}{\gamma\mu} = -\frac{1}{2M\sqrt{L}}\frac{\partial M}{\partial\lambda},$$

par suite

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{di}{ds} + \frac{1}{\gamma\lambda}\sqrt{L}\lambda' + \frac{1}{\gamma\mu}\sqrt{M}\mu'$$

ou encore

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{di}{ds} + \frac{\cos i}{\gamma\lambda} + \frac{\sin i}{\gamma\mu},$$

formule découverte par M. O. Bonnet et qui permet de mettre les équations des géodésiques sous la forme

$$\frac{di}{ds} = \frac{\cos i}{\gamma\lambda} + \frac{\sin i}{\gamma\mu}.$$

XXII. — Théorème de M. O. Bonnet.

On peut donner de la courbure géodésique une expression remarquable due à M. O. Bonnet. Si l'on désigne par dx, dy, dz et par δx, δy, δz des déplacements effectués sur la surface dans deux directions rectangulaires, on aura évidemment l'expression suivante de la courbure géodésique $\frac{\cos\theta}{\rho}$ de la courbe dx, dy, dz

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\delta z}{\delta s}$$

ou

$$(a) \qquad \frac{\cos\theta}{\rho} = \sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\delta x}{\delta s};$$

or on a

$$\sum dx^2 = ds^2, \qquad \sum \delta x^2 = \delta s^2.$$

Si l'on différentie la première de ces formules avec la caractéristique δ, on a

$$(b) \qquad \sum dx\,\delta\,dx = ds\,\delta\,ds;$$

si l'on différentie la condition d'orthogonalité

$$\sum dx\,\delta x = 0$$

avec la caractéristique d, on a

$$\sum d^2x\,\delta x + \sum dx\,\delta\,dx = 0;$$

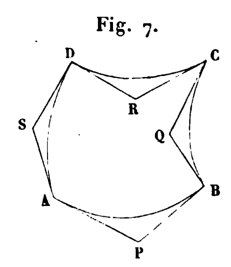
en vertu de (a) et (b), cette formule donne

$$(c) \qquad \frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{\delta\,ds}{ds\,\delta s}.$$

XXIII. — Théorème de Lamé.

Supposons que AB (*fig.* 7) représente la ligne coordonnée $\mu =$ const. et AD la ligne coordonnée $\lambda =$ const., supposons les coordonnées orthogonales et soient DC la ligne dans laquelle se change AB quand μ se change en $\mu + \Delta\mu$ et BC

Fig. 7.



celle dans laquelle se change AD quand λ se change en $\lambda + \Delta\lambda$. Par les points A, B, C, D menons des arcs de géodésiques tangents aux côtés du quadrilatère ABCD : nous formerons un octogone géodésique APBQCRDS dont les angles seront donnés par les formules

$$A = \frac{\pi}{2}, \quad P = \pi - \varepsilon_\lambda, \quad B = \frac{\pi}{2}, \quad Q = \pi - \varepsilon_\mu + \Delta_\lambda \varepsilon_\mu,$$

$$C = \frac{\pi}{2}, \quad R = \pi + \varepsilon_\lambda + \Delta_\mu \varepsilon_\lambda, \quad D = \frac{\pi}{2}, \quad S = \pi - \varepsilon_\mu;$$

ε_λ et ε_μ désignant les angles minima que font les tangentes géodésiques en D et en B avec les tangentes en A. Exprimons que la courbure totale de notre octogone est égale à l'excès de la somme de ses angles sur douze droits ou sur 6π (p. 115); nous aurons, en appelant K la courbure totale de la surface en A et S, la surface ABCD

$$SK = \Delta_\lambda \varepsilon_\mu + \Delta_\mu \varepsilon_\lambda$$

Or on a $\varepsilon_\mu = \dfrac{ds_\mu}{\gamma_\mu}$, $\varepsilon_\lambda = \dfrac{ds_\lambda}{\gamma_\lambda}$ en appelant γ_μ et γ_λ les rayons

de courbure géodésique des lignes $\lambda =$ const. et $\mu =$ const. et s_μ, s_λ les longueurs de leurs arcs; on peut donc écrire l'équation précédente

$$K\sqrt{LM}\,d\lambda\,d\mu = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{ds_\mu}{\gamma_\mu}\,d\lambda + \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{ds_\lambda}{\gamma_\lambda}\,d\mu$$

ou bien

$$\sqrt{LM}\,K\,d\lambda\,d\mu = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\sqrt{M}\,d\lambda\,d\mu}{\gamma_\mu} + \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\sqrt{L}\,d\lambda\,d\mu}{\gamma_\lambda}$$

ou encore

$$\sqrt{LM}\,K = \frac{1}{2\sqrt{M}}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{1}{\gamma_\mu} + \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial\mu}\frac{1}{\gamma_\lambda} + \sqrt{M}\frac{\partial\frac{1}{\gamma_\mu}}{\partial\lambda} + \sqrt{L}\frac{\partial\frac{1}{\gamma_\lambda}}{\partial\mu};$$

or (p. 135) on a vu que

$$\frac{1}{\gamma_\lambda} = \frac{1}{2L\sqrt{M}}\frac{\partial L}{\partial\mu}, \qquad \frac{1}{\gamma_\mu} = -\frac{1}{2M\sqrt{L}}\frac{\partial M}{\partial\lambda};$$

donc la formule précédente peut s'écrire

$$K = -\frac{1}{\gamma_\mu^2} + \frac{1}{\gamma_\lambda^2} + \frac{\partial\frac{1}{\gamma_\mu}}{\sqrt{L}\,\partial\lambda} + \frac{\partial\frac{1}{\gamma_\lambda}}{\sqrt{M}\,\partial\mu}.$$

Telle est l'équation de Lamé qui doit avoir lieu pour que le système de coordonnées soit orthogonal.

XXIV. — Courbure normale et courbure propre.

La courbure géodésique s'introduit bien plus naturellement dans la théorie des surfaces que la courbure ordinaire ou propre des courbes tracées sur ces surfaces. Toutefois, si l'on tient à calculer la courbure propre d'une courbe, il faut calculer sa courbure tangentielle ou géodésique $\frac{\cos\theta}{\rho}$ et sa courbure normale $\frac{\sin\theta}{\rho}$: la racine carrée de la somme des carrés de ces courbures fournira la courbure propre $\frac{1}{\rho}$.

La courbure normale est celle qui se présente tout d'abord quand on veut calculer la courbure d'une courbe tracée sur une surface; et, en effet, si l'on se donne les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe a, b, c au point (x, y, z), les cosinus directeurs a', b', c' de sa normale principale; si l'on appelle p, q les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; r, s, t les dérivées $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ du z de la surface, ρ le rayon de courbure de la courbe, θ l'angle que fait le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface, on aura

$$\sin\theta = \frac{a'p + b'q - c'}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

et, en observant que $a' = \rho\frac{d^2 x}{ds^2}$, $b' = \rho\frac{d^2 y}{ds^2}$, $c' = \rho\frac{d^2 z}{ds^2}$,

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{p\frac{d^2 x}{ds^2} + q\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{d^2 z}{ds^2}}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

ou, en observant que

$$p\frac{d^2 x}{ds^2} + q\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{d^2 z}{ds^2} = -\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right],$$

on a finalement

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right].$$

C'est donc la courbure $\frac{\sin\theta}{\rho}$ qui se présente quand on cherche $\frac{1}{\rho}$. Cette formule, quand on y fait $\theta = 0$, est celle que l'on a trouvée (t. II, p. 458) et dont on a fait usage pour l'étude de la courbure dans les sections normales; elle contient la démonstration du théorème de Meusnier.

La courbure normale en coordonnées curvilignes sera donnée par la formule (p. 99)

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{l\lambda'^2 + 2r\lambda'\mu' + m\mu'^2}{\sqrt{LM - R^2}(L\lambda'^2 + 2R\lambda'\mu' + M\mu'^2)};$$

la courbure d'une asymptotique est égale à sa courbure géodésique, celle d'une géodésique à sa courbure normale.

XXV. — Torsion géodésique.

Soient $\frac{1}{g}$ la torsion géodésique d'une courbe, $d\tau = \frac{ds}{T}$ son angle de torsion; $d\psi$ l'angle que fait la normale à la surface avec le plan tangent à la courbe normale à la surface menée par le point infiniment voisin; soit enfin θ l'angle que le plan osculateur à la courbe fait avec le plan tangent à la surface. Nous avons vu que (p. 25)

$$d\psi = d\tau + d\theta;$$

nous aurons alors, en divisant les deux membres de cette formule par l'élément d'arc ds et en observant que $\frac{1}{g}$ est par définition égal au rapport $\frac{d\psi}{ds}$,

$$\frac{1}{g} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{d\theta}{ds}.$$

En appelant α, β, γ les cosinus des angles que la normale à la surface fait avec les axes, nous avons trouvé (p. 24)

$$(a) \qquad ds\, d\psi = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix};$$

or α est égal à $\frac{p}{\sqrt{\sum p^2}}$ ou $\frac{p}{\sqrt{LM - R^2}}$, donc

$$d\alpha = \frac{dp}{\sqrt{LM - R^2}} + p.d\frac{1}{\sqrt{LM - R^2}}.$$

Si de la troisième ligne on retranche alors le produit de la seconde par $\sqrt{LM - R^2}\, d\dfrac{1}{\sqrt{LM - R^2}}$, on trouve

$$ds\, d\psi = \frac{1}{LM - R^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ p & p' & p'' \\ dp & dp' & dp'' \end{vmatrix};$$

or

$$\sum p^2 = LM - R^2 = \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix};$$

en multipliant membre à membre, on a

$$(LM - R^2)^2\, ds\, d\psi = \begin{vmatrix} 0 & L\, d\lambda + R\, d\mu & R\, d\lambda + M\, d\mu \\ \sum p^2 & 0 & 0 \\ \sum p\, dp & \sum \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\, dp & \sum \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\, dp \end{vmatrix},$$

ou en observant que $\sum p^2 = LM - R^2$

$$(b)\ \begin{cases} (LM - R^2)\, ds\, d\psi \\ \quad = -(L\, d\lambda + R\, d\mu)\sum \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\, dp + (R\, d\lambda + M\, d\mu)\sum \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\, dp. \end{cases}$$

Or on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \mu}\, dp = d\sum p\,\frac{\partial x}{\partial \mu} - \sum p\, d\,\frac{\partial x}{\partial \mu}$$

ou

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial \mu}\, dp &= -\sum p\,\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu}\, d\lambda - \sum p\,\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}\, d\mu \\ &= -(r\, d\lambda + m\, d\mu), \\ \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\, dp &= -(l\, d\lambda + r\, d\mu); \end{aligned}$$

la formule (b) donne alors

$$\begin{aligned} (LM - R^2)\, ds\, d\psi = {} & (L\, d\lambda + R\, d\mu)(r\, d\lambda + m\, d\mu) \\ & -(R\, d\lambda \text{ [illegible] } + r\, d\mu) \end{aligned}$$

En appelant alors $\frac{1}{g}$ la torsion géodésique, on a

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{g} = \frac{-1}{LM - R^2} [&\lambda'^2(lR - Lr) \\ &+ \lambda'\mu'(lM - mL) + \mu'^2(rM - mR)]; \end{aligned} \right.$$

en égalant $\frac{1}{g}$ à zéro, on retrouve les équations des lignes de courbure. En prenant les lignes de courbure pour lignes coordonnées, on a

$$\frac{1}{g} = -\lambda'\mu'\left(\frac{l}{L} - \frac{m}{M}\right);$$

en appelant alors $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ les courbures principales, on a

$$\frac{1}{g} = \lambda'\mu'\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sqrt{LM}$$

ou

$$\frac{ds^2}{g} = ds_\lambda\, ds_\mu \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

ou encore

$$(c)\qquad \frac{1}{g} = \sin i \cos i \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Cette formule (c) pouvait se démontrer en partant de la formule (a) et en supposant que l'on ait pris le plan tangent et les sections principales pour axes. Le calcul est très simple, nous nous dispenserons de le faire.

La formule (c) peut s'écrire, en posant $a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$,

$$(A)\qquad \frac{1}{g} = a \sin 2i.$$

La torsion géodésique d'une courbe ne dépend donc que de l'orientation de cette courbe par rapport aux lignes de courbure et elle varie comme le carré du rayon vecteur d'une lemniscate de Bernoulli. Si l'on observe que $\frac{1}{g} = \frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds}$,

en vertu du théorème de Lancret, on voit que, pour une ligne géodésique, $d\theta$ étant nul, on a

$$\frac{1}{T} = a \sin 2i.$$

Donc *la torsion d'une ligne géodésique ne dépend que de son orientation et varie comme le carré du rayon vecteur d'une lemniscate de Bernoulli.*

La torsion d'une géodésique tangente à une ligne de courbure est donc nulle.

Donc enfin une ligne de courbure ne peut être *géodésique* que si sa torsion est nulle; donc :

Pour qu'une ligne de courbure soit une ligne géodésique, il faut qu'elle soit plane, et que son plan soit partout normal à la surface.

Enfin on voit que *les torsions géodésiques dans deux directions rectangulaires ont une somme nulle.*

La formule (A) fournit aussi une expression remarquable de la torsion d'une ligne asymptotique; le plan osculateur d'une asymptotique étant tangent à la surface, on a

$$\theta = 0, \ d\theta = 0$$

et

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{T},$$

en sorte que pour une asymptotique comme pour une géodésique, on a

$$\frac{1}{T} = a \sin 2i = \frac{1}{2} \sin 2i \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right);$$

mais on a

$$\tang i = \frac{\sqrt{M}\, d\mu}{\sqrt{L}\, d\lambda}, \qquad \sin 2i = 2\sqrt{LM}\,\lambda'\mu',$$

donc

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{T} = \sqrt{LM} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \lambda'\mu';$$

mais l'équation des asymptotiques est

$$l\lambda'^2 + m\mu'^2 = 0,$$
$$L\lambda'^2 + M\mu'^2 = 1.$$

En remplaçant dans (B) λ' et μ' par leur valeur tirée de là, on trouve

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{\sqrt{LM}\sqrt{-lm}}{Lm - Ml}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right);$$

et, si l'on observe que $\frac{l}{L} = \frac{1}{R_1}$, $\frac{m}{M} = \frac{1}{R_2}$, on a facilement

$$\frac{1}{T} = \pm\sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}}.$$

XXVI. — Des surfaces applicables.

On dit que deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre quand on peut faire correspondre leurs points deux à deux, de telle sorte que deux arcs correspondants infiniment petits soient toujours égaux.

Supposons que l'on ait tracé sur deux surfaces un système de lignes coordonnées : soient λ, μ les coordonnées curvilignes d'un point M de la première surface, λ', μ' les coordonnées du point M' correspondant de M sur la seconde surface, ds, ds' deux arcs correspondants passant en M et en M'. On aura pour ds^2 et ds'^2 des expressions de la forme

$$ds^2 = L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2,$$
$$ds'^2 = L'\,d\lambda'^2 + 2R'\,d\lambda'\,d\mu' + M'\,d\mu'^2,$$

et pour que les surfaces soient applicables l'une sur l'autre on devra avoir $ds = ds'$ ou

$$\text{(A)}\quad L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2 = L'\,d\lambda'^2 + 2R'\,d\lambda'\,d\mu' + M'\,d\mu'^2.$$

Mais dire que les points M et M' se correspondent, c'est dire que, M étant donné, M' est déterminé ; donc on doit supposer

λ' et μ' fonctions de λ et μ, de sorte que ds'^2 peut se mettre sous la forme

$$L_1 d\lambda^2 + 2 R_1 d\lambda\, d\mu + M_1 d\mu^2,$$

en prenant pour variables λ et μ. Rien ne nous empêche alors de supposer les quantités λ' et μ' égales respectivement à λ et à μ : la formule (A) devant alors avoir lieu quels que soient $d\lambda$ et $d\mu$, il faudra que l'on ait

$$L = L', \qquad M = M', \qquad N = N';$$

réciproquement, si pour deux surfaces les éléments ds^2 et ds'^2 correspondants affectent la même forme, ces surfaces seront evidemment applicables l'une sur l'autre.

Nous avons vu que l'expression de la courbure d'une surface ne dépendait que de L, M, N (p. 103) et de leurs dérivées; il en résulte le théorème de Gauss :

Théorème de Gauss. — *Pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, il faut que leurs courbures totales soient les mêmes aux points correspondants.*

En effet, la courbure totale étant une fonction de L, M, R et de leurs dérivées, si l'on observe que, pour que les surfaces soient applicables, il faut que les L, M, R soient égaux, il faut que toutes les fonctions de L, M, R soient les mêmes dans les deux surfaces, et, en particulier, il faut que les courbures totales soient les mêmes.

Mais il ne suffit pas que les courbures soient égales aux points correspondants pour que les surfaces soient applicables l'une sur l'autre.

Théorème II. — *Pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, il faut qu'une géodésique quelconque de l'une ait pour correspondante une géodésique de l'autre.*

Ce théorème résulte, comme le précédent, de ce que les géodésiques ne dépendent que de L, M, R. D'ailleurs toute

ligne minima de l'une doit être une ligne minima de l'autre, puisque toutes les lignes correspondantes doivent être égales entre elles.

Liouville a donné de la courbure totale K d'une surface diverses expressions que l'on vérifiera aisément en les comparant à la formule générale de Gauss, ou en les calculant directement.

1° ds étant de la forme $L\,d\lambda^2 + M\,d\mu^2$,

$$K = \frac{1}{\sqrt{LM}}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\sqrt{L}}{\gamma\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{\sqrt{M}}{\gamma\lambda}\right),$$

$\gamma\mu$ et $\gamma\lambda$ désignant les rayons de courbure géodésique de $\mu =$ const. et $\lambda =$ const.

2° ds étant de la forme $R\,d\lambda\,d\mu$,

$$K = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\frac{\partial R}{\partial\mu}.$$

3° ds étant de la forme $L d\lambda^2 + d\mu^2$,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial^2\sqrt{L}}{\partial\mu^2};$$

4° ds étant de la forme $\Lambda(d\lambda^2 + d\mu^2)$,

$$K = -\frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial^2\log\Lambda}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2\log\Lambda}{\partial\mu^2}\right).$$

Quand $\Lambda =$ const., on a $K = 0$ et la surface est développable.

XXVII. — Méthode pour rechercher des surfaces applicables les unes sur les autres.

Soient S et S' deux surfaces; soient λ, μ des coordonnées curvilignes relatives à la première surface, λ', μ' des coordonnées curvilignes relatives à la seconde; soient ds l'élément d'arc tracé sur la première, ds' l'élément d'arc tracé sur la seconde; soit enfin $K = f(\lambda, \mu)$ la courbure totale de la pre-

mière, $K' = f'(\lambda', \mu')$ la courbure totale de la seconde; soient enfin

$$ds^2 = L d\lambda^2 + 2 R d\lambda\, d\mu + M d\mu^2,$$
$$ds'^2 = L' d\lambda'^2 + 2 R' d\lambda'\, d\mu' + M' d\mu'^2.$$

Pour que nos deux surfaces, S et S', soient applicables l'une sur l'autre, il faudra d'abord que l'on ait, en vertu du théorème de Gauss, $K = K'$, ou

$$f(\lambda, \mu) = f'(\lambda', \mu');$$

cette formule ne pourrait pas être satisfaite dans le cas où f se réduirait à une constante, à moins que f' ne se réduise à la même constante. Nous écarterons d'abord ce cas.

Prenons alors $f = f'$ pour variable indépendante, et substituons cette fonction à la place de l'une des variables λ, μ; en d'autres termes, supposons que λ soit précisément la courbure totale de l'une et l'autre surface. On pourra écrire

$$(\alpha) \qquad ds^2 = L d\lambda^2 + 2 R d\lambda\, d\mu + M d\mu^2,$$

$$(\beta) \qquad ds'^2 = L' d\lambda^2 + 2 R' d\lambda\, d\mu' + M' d\mu'^2.$$

Maintenant pour que nos surfaces soient applicables l'une sur l'autre, il faut que l'on puisse exprimer μ' en fonction de λ et μ, de telle sorte que

$$ds = ds';$$

posons donc

$$d\mu' = \frac{\partial\mu'}{\partial\lambda} d\lambda + \frac{\partial\mu'}{\partial\mu} d\mu,$$

la formule (β) deviendra

$$ds'^2 = \left[L' + \left(\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda}\right)^2 M' + 2 \frac{\partial\mu'}{\partial\lambda} R'\right] d\lambda^2 + \left(2 R' \frac{\partial\mu'}{\partial\mu} + 2 M' \frac{\partial\mu'}{\partial\lambda} \frac{\partial\mu'}{\partial\mu}\right) d\lambda\, d\mu + M' \left(\frac{\partial\mu'}{\partial\mu}\right)^2 d\mu^2,$$

et, pour que $ds^2 = ds'^2$, il faut et il suffit que, en comparant

avec (α), on ait

$$(\gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= L' + \left(\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda}\right)^2 M' + 2\,\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda}\,R',\\ R &= R'\,\frac{\partial\mu'}{\partial\mu} + M'\,\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\mu'}{\partial\mu},\\ M &= M'\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\mu}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

La dernière formule donne

$$\frac{\partial\mu'}{\partial\mu} = \sqrt{\frac{M}{M'}} = \varpi,$$

la seconde

$$\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda} = \left(R - R'\,\frac{\partial\mu'}{\partial\mu}\right) : M'\,\frac{\partial\mu'}{\partial\mu} = \frac{R - R'\varpi}{M'\varpi} = \psi,$$

la première

$$L = L' + M'\psi'^2 + 2R'\psi,$$

ou

$$L = L' + M'\left(\frac{R\sqrt{M'} - R'\sqrt{M}}{M'\sqrt{M}}\right)^2 + 2R'\,\frac{R\sqrt{M'} - R'\sqrt{M}}{M'\sqrt{M}},$$

c'est-à-dire

$$L = L' + \frac{R^2M' - R'^2M}{MM'},$$

ou

$$(\delta)\qquad L - \frac{R^2}{M} = L' - \frac{R'^2}{M'}.$$

Pour que ϖ et ψ puissent être regardées comme des dérivées d'une même fonction μ', il faut que

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\lambda} = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}$$

ou bien, faisant usage de la lettre d pour le cas où λ, μ et μ' sont variables indépendantes,

$$(\varepsilon)\qquad \frac{d\varpi}{d\lambda} + \frac{d\varpi}{d\mu'}\,\psi = \frac{d\psi}{d\mu} + \frac{d\psi}{d\mu'}\,\varpi;$$

on n'aura pas besoin de recourir à cette équation (ε) si (δ) contient μ', car, en le tirant de là, on pourra vérifier si $\frac{\partial\mu'}{\partial\mu} = \varpi$ et si $\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda} = \psi$. Si ($\delta$) ne contient pas μ', elle sera identique; (ε) devra avoir lieu, on en déduira μ' et l'on verra si $\frac{\partial\mu'}{\partial\mu} = \varpi$ et si $\frac{\partial\mu'}{\partial\lambda} = \psi$. Dans ce cas les surfaces seront applicables.

XXVIII. — Étude du cas où la courbure est constante.

Nous avons vu que, sur toute surface, on pouvait trouver un système de coordonnées, telles que la courbure pût se mettre sous la forme

$$(a) \qquad \pm\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial^2 \log\Lambda}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2 \log\Lambda}{\partial\mu^2}\right);$$

sur ces surfaces, on a

$$(b) \qquad ds^2 = \Lambda(d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Voyons à quelles conditions la courbure $\pm\frac{1}{a^2}$ sera constante. Ce cas ne pouvant être traité par l'analyse précédente, il convient de l'étudier à part.

Si l'on fait

$$\lambda + \mu\sqrt{-1} = u, \qquad \lambda - \mu\sqrt{-1} = v,$$

la formule (a) devient

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 \log\Lambda}{\partial u\,\partial v} = \pm\frac{\Lambda}{2a^2};$$

cette équation a été intégrée, comme il suit, par Liouville (*voir* les notes à la *Géométrie analytique* de Monge, dernière édition). On pose

$$\Lambda = \frac{\partial\theta}{\partial u};$$

la formule devient alors

$$\frac{\partial^2 \log A}{\partial u \, \partial v} \pm \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{1}{2a^2} = 0$$

ou, en intégrant,

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} \pm \frac{\theta}{2a^2} + f(v) = 0,$$

$f(v)$ désignant une fonction arbitraire. Multipliant par $\frac{\partial \theta}{\partial u}$, il vient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} \pm \frac{\theta}{2a^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} + f(v) \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0$$

et, en intégrant,

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} \pm \frac{\theta^2}{4a^2} + \theta f(v) + F(v) = 0,$$

$F(v)$ désignant une nouvelle fonction arbitraire. Soit $\varpi(v)$ une solution particulière de cette équation : posons

$$(d) \qquad \theta = \varpi(v) - \psi;$$

nous aurons

$$\varpi'(v) \pm \frac{\varpi^2(v)}{4a^2} + \varpi(v) f(v) + F(v) = 0,$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial v} \pm \frac{1}{4a^2}[-2\varpi(v)\psi + \psi^2] - f(v)\psi = 0.$$

Divisons par ψ^2 et posons $\psi = \frac{1}{\zeta}$, nous aurons

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} \pm \frac{1}{4a^2}[-2\varpi(v)\zeta + 1] - f(v)\zeta = 0$$

ou

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta\left[f(v) \pm \frac{\varpi(v)}{2a^2}\right] \pm \frac{1}{4a^2} = 0.$$

On peut intégrer cette équation linéaire, et, si l'on pose

$$\Psi(v) = \frac{1}{4a^2} \int e^{\int \left[f(v) \mp \frac{\varpi(v)}{2a^2}\right] dv} dv,$$

on trouve

$$\zeta = [\Phi(u) \pm \Psi(v)] \frac{1}{4a^2 \Psi'(v)},$$

$\Phi(u)$ désignant la constante d'intégration.

On en conclut, en vertu de (d),

$$\theta = \varpi(v) - \frac{4a^2\Psi'(v)}{\Phi(u) \pm \Psi(v)}$$

et

$$(f) \qquad \Lambda = \frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{4a^2\Psi'(v)\Phi'(u)}{[\Phi(u) \pm \Psi(v)]^2}.$$

Pour que Λ soit réel, Φ et Ψ doivent être conjugués; posons donc

$$\Phi(u) = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \Psi(v) = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on a

$$\Phi'(u)(d\lambda + d\mu\sqrt{-1}) = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$\Psi'(v)(d\lambda - d\mu\sqrt{-1}) = d\alpha - d\beta\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\Phi'(u)\Psi'(v)(d\lambda^2 + d\mu^2) = d\alpha^2 + d\beta^2;$$

la formule (f) peut s'écrire alors, en prenant le signe $+$,

$$\Lambda = \frac{4a^2(d\alpha^2 + d\beta^2)}{4\alpha^2} \frac{1}{d\lambda^2 + d\mu^2},$$

et l'on a

$$(g) \qquad ds^2 = \frac{a^2}{\alpha^2}(d\alpha^2 + d\beta^2);$$

si l'on prend le signe $-$, on a

$$\Lambda = -\frac{4a^2(d\alpha^2 + d\beta^2)}{-4\beta^2} \frac{1}{d\lambda^2 + d\mu^2},$$

$$(h) \qquad ds^2 = \frac{a^2}{\beta^2}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Les équations (g) et (h) montrent que les surfaces qui ont même courbure constante $\pm \frac{1}{a^2}$ sont applicables les unes sur

les autres, puisque l'élément ds y a sur toutes la même forme. En particulier, toute surface dont la courbure est positive et constante est applicable sur une sphère.

Parmi les surfaces à courbure constante se trouve une surface remarquable appelée *pseudosphère :* c'est la surface de révolution engendrée par une tractrice (développante de chaînette) tournant autour de son asymptote. Dans cette courbe le produit du rayon de courbure par la normale est constant; elle engendre alors, comme il est facile de le voir, une surface de révolution dont les rayons de courbure sont la normale et le rayon de courbure de la tractrice, et par suite dont la courbure est constante.

En général, les courbes planes dont le produit du rayon de courbure par la normale est constant sont compliquées; leur équation renferme des fonctions elliptiques, comme il est très facile de s'en assurer.

XXIX. — Quelques propriétés des surfaces à courbure constante.

On peut parvenir plus directement aux résultats obtenus au paragraphe précédent : en effet, en prenant les coordonnées de Gauss, on a

$$ds^2 = dr^2 + G^2 d\theta^2,$$

et, en exprimant que la courbure $k = \frac{\pm 1}{a^2}$ est constante, on a

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = k$$

et, par suite,

$$G = A \cos r\sqrt{k} + B \sin r\sqrt{k},$$

A et B désignant des fonctions de θ seul. Or, pour $r = 0$, $G = 0$; car, en supposant r constant et infiniment petit, on a $ds = G\,d\theta$ et $ds = r\,d\theta$; ce qui exige que $G = r$ et que, par conséquent, G s'annule avec r. La formule précédente donne alors

$$G = B \sin r\sqrt{k},$$

et l'on a

$$ds^2 = dr^2 + B^2 \sin^2 r\sqrt{k}\, d\theta^2$$
$$= \sin^2 r\sqrt{k}\left(\frac{dr^2}{\sin^2 r\sqrt{k}} + B^2 d\theta^2\right)$$

ou

$$ds^2 = \sin^2 r\sqrt{k}\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

en posant

$$d\alpha = \frac{dr}{\sin r\sqrt{k}}, \qquad d\beta = B\, d\theta.$$

Toutes les surfaces ayant même k constant sont donc applicables les unes sur les autres.

Considérons maintenant une surface de courbure k et une sphère de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$, ces deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre; un triangle géodésique ABC de la première surface sera donc applicable sur un triangle sphérique ayant les mêmes angles A, B, C et les mêmes côtés $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{k}$, $c\sqrt{k}$; les formules de la Trigonométrie sphérique s'appliqueront donc au triangle géodésique en question, et l'on aura

$$\frac{\sin a\sqrt{k}}{\sin A} = \frac{\sin b\sqrt{k}}{\sin B} = \frac{\sin c\sqrt{k}}{\sin C}, \qquad \ldots\ldots$$

Ces formules subsistent lors même que k est négatif, c'est-à-dire lors même que les rayons de courbure sont de signes contraires.

Nous allons en donner une démonstration tout à fait générale. A cet effet, reprenons les coordonnées de Gauss; le ds de la surface sera donné par la formule

$$(a) \qquad ds^2 = dr^2 + G^2 d\theta^2,$$

la courbure constante k par la suivante

$$k = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2};$$

d'où l'on tire, comme plus haut,

$$(b) \qquad G = B \sin r\sqrt{k},$$

$\sqrt{k}$ pouvant être réel ou imaginaire et B désignant une fonction de θ ne contenant pas r. Enfin l'équation différentielle des lignes géodésiques sera

$$\frac{d\cos i}{ds} = G\frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$

ou, en vertu de (b),

$$(c) \qquad \frac{d\cos i}{ds} = B^2\sqrt{k}\sin r\sqrt{k}\cos r\sqrt{k}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2;$$

les formules qui donnent i deviennent

$$(d) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin i}{G} = \frac{\sin i}{B\sin r\sqrt{k}}, \qquad \frac{dr}{ds} = \cos i;$$

en vertu de ces formules, l'équation (c) des géodésiques devient

$$-\frac{di}{ds}\sin i = \sqrt{k}\sin^2 i\cot r\sqrt{k}$$

et, en remplaçant ds par $\frac{dr}{\cos i}$,

$$\frac{-di}{\operatorname{tang} i} = \frac{\sqrt{k}\,dr}{\operatorname{tang} r\sqrt{k}}.$$

L'intégration donne

$$\sin i\sin r\sqrt{k} = \text{const.} = \sin i_0\sin r_0\sqrt{k},$$

en désignant par r_0 et i_0 deux valeurs particulières de r et i; on trouve ainsi

$$(f) \qquad \frac{\sin i}{\sin i_0} = \frac{\sin r_0\sqrt{k}}{\sin r\sqrt{k}},$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Soient a, b, c les côtés, A, B, C *les angles opposés d'un triangle géodésique tracé sur une surface à courbure constante : on a les relations*

$$(A) \qquad \frac{\sin a\sqrt{k}}{\sin A} = \frac{\sin b\sqrt{k}}{\sin B} = \frac{\sin c\sqrt{k}}{\sin C}.$$

ce qui va nous permettre d'écrire les formules (f) ainsi :

$$(g) \qquad \frac{\sin i}{\sin r_0 \sqrt{k}} = \frac{\sin i_0}{\sin r \sqrt{k}} = \frac{\sin \theta}{\sin s \sqrt{k}},$$

en appelant s le côté opposé à l'angle θ, c'est-à-dire en supposant que r_0 corresponde à la ligne coordonnée $\theta = 0$.

Reprenons la formule (d)

$$(h) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin i}{\mathrm{B} \sin r \sqrt{k}} = \frac{\sin^2 i}{\mathrm{B} \sin r_0 \sqrt{k} \sin i_0};$$

des formules (g) on tire

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 s \sqrt{k}} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r_0 \sqrt{k}};$$

en divisant alors la formule (h) par celle-ci, on a

$$\frac{d\theta}{\sin^2 \theta} : \frac{ds}{\sin^2 s \sqrt{k}} = \frac{\sin r_0 \sqrt{k}}{\mathrm{B} \sin i_0}$$

ou

$$(i) \qquad \frac{\mathrm{B}\, d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{ds}{\sin^2 s \sqrt{k}} \, \frac{\sin r_0 \sqrt{k}}{\sin i_0}.$$

Nous supposerons $\sqrt{k}\mathrm{B} = 1$, ce qui ne diminue en rien la généralité de nos conclusions; cela revient à supposer

$$ds^2 = dr^2 + \frac{1}{\sqrt{k}} \sin^2 r \sqrt{k}\, d\theta^2,$$

ce à quoi l'on arrive en prenant pour variable $\int \mathrm{B}\, d\theta$ à la place de θ; la formule (i) devient en intégrant

$$\cot \theta = \cot s \sqrt{k} \, \frac{\sin r_0 \sqrt{k}}{\sin i_0} + \text{const.}$$

ou

$$\cot \theta \sin i_0 - \cot s \sqrt{k} \sin r_0 \sqrt{k} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{\cos \theta \sin i_0}{\sin \theta} - \frac{\cos s \sqrt{k} \sin r_0 \sqrt{k}}{\sin s \sqrt{k}} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{\cos\theta \sin r\sqrt{k} - \cos s\sqrt{k}\sin r_0\sqrt{k}}{\sin s\sqrt{k}} = \text{const.};$$

si alors on fait $s = 0$, $r = r_0$, on trouve

$$\cos r_0\sqrt{k}\cos i_0 = \text{const.}$$

On a donc finalement

$$\cot\theta \sin i_0 = \cot s\sqrt{k}\sin r_0\sqrt{k} + \cos r_0\sqrt{k}\cos i_0,$$

ce qui établit les formules

$$\cot a\sqrt{k}\sin b\sqrt{k} = \cos b\sqrt{k}\cos C + \sin C\cot A,$$

lesquelles jointes aux formules (A) permettent d'établir entre A, B, C et $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{k}$, $c\sqrt{k}$ toutes les formules qui ont lieu entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique.

Bien entendu, quand k est négatif, les lignes trigonométriques seront remplacées par les fonctions hyperboliques de même nom.

Une remarque avant d'abandonner ce sujet : considérons la formule

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a\sqrt{k};$$

si l'on y suppose $B = C = \frac{\pi}{2}$, elle devient

$$\cos A = \cos a\sqrt{k}.$$

Si k est positif et égal à $\frac{1}{R^2}$, on en tire pour a une valeur réelle; sur une surface à courbure positive, il existe donc des triangles *birectangles;* en d'autres termes, *deux géodésiques perpendiculaires à une troisième se rencontrent toujours.*

Si, au contraire, $k = -\frac{1}{R^2}$, la formule précédente donne

$$\cos A = \frac{e^{a\mathrm{R}} + e^{-a\mathrm{R}}}{2},$$

d'où l'on ne peut tirer de valeur admissible pour A, le pre-

mier membre étant moindre que 1, le second plus grand; donc :

Sur une surface à courbure constante négative, deux géodésiques perpendiculaires à une troisième ne se rencontrent jamais.

Il y a plus, si, dans la formule

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\sqrt{k},$$

on fait seulement $B = \frac{\pi}{2}$, il faudra que C ait une valeur moindre que $\frac{\pi}{2}$, pour que A ait une valeur réelle quand a est donné; il y aura donc, si je puis m'exprimer ainsi, un *angle de parallélisme,* et pour une valeur donnée de a un angle C limite, séparant les géodésiques rencontrant la perpendiculaire en B à a, de celles qui ne la rencontrent pas.

La géométrie des géodésiques sur une surface à courbure constante négative présentera alors une grande analogie avec ce que l'on a appelé la géométrie *non euclidienne,* c'est-à-dire avec la géométrie plane de la ligne droite démontrée sans admettre le postulatum d'Euclide.

(*Voir* les travaux de Bolyai et Lobatchefsky, analysés par M. Houël dans les *Mémoires de l'Académie de Bordeaux,* et les notes de la dernière édition de la *Géométrie* de MM. Rouché et Comberousse.)

XXX. — Surfaces applicables sur le plan.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point d'une surface applicable sur un plan; x, y les coordonnées du point correspondant du plan. En égalant les éléments d'arcs tracés sur les deux surfaces, on a

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = dx^2 + dy^2;$$

en remplaçant $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ par leurs développements et en identifiant, on a

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2=1.\\ &\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0,\\ &\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2=1; \end{aligned}\right.$$

en différentiant ces équations par rapport à x et à y, on trouve

$$\sum\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}=0,\qquad \sum\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\right)=0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}\right)=0,$$

$$\sum\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \sum\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}=0.$$

Ces équations, convenablement combinées par soustraction, donnent

$$\sum\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}=0,\qquad \sum\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \sum\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2};$$

$$\sum\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}=0,\qquad \sum\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \sum\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}.$$

Si, pour abréger l'écriture, on pose

$$A=\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial(x,y)},\qquad B=\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial(x,y)},\qquad C=\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y},$$

les équations précédentes montrent que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}:A=\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}:B=\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}:C,\\ &\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}:A=\frac{\partial^2\beta}{\partial x\,\partial y}:B=\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\,\partial y}:C,\\ &\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}:A=\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}:B=\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}:C \end{aligned}$$

on en conclut

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\, \partial y};$$

par suite, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ ont leurs dérivées proportionnelles. Ces quantités dépendent donc d'un même paramètre t; on voit d'une façon analogue que $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial y}$ sont également fonctions d'un même paramètre t'; enfin la deuxième équation (a) montre qu'entre t et t' il existe une relation : donc les six dérivées $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \gamma}{\partial y}$ sont fonctions d'un même paramètre t. Or on a

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\, d\beta,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y}:$$

$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \gamma}{\partial \beta}$ sont donc des fonctions d'un même paramètre ou, si l'on veut,

$$\varphi\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\right) = 0,$$

ce qui est l'équation des surfaces développables. Ces surfaces sont donc les seules qui soient applicables sur un plan.

XXXI. — Théorème de Bour.

Toute surface hélicoïdale est applicable sur une surface de révolution.

Toute surface hélicoïdale peut être représentée par les équations

(A) $\qquad x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = k\varphi + \psi(a);$

en supposant a constant, on obtient des hélices. Cherchons leurs trajectoires orthogonales, et soit $u =$ const. l'équation

de ces trajectoires; prenons u à la place de φ pour variable, nous aurons

$$dx = da\cos\varphi - a\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial a}da - a\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}du,$$

$$dy = da\sin\varphi + a\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial a}da + a\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}du,$$

$$dz = k\frac{\partial\varphi}{\partial a}da + k\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \psi'(a)da;$$

on en conclut cette expression pour l'arc ds^2

$$\begin{aligned} ds^2 = da^2&\left[1 + a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)^2 + k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)^2 + \psi'^2(a) + 2k\psi'(a)\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right]\\ &+ 2\,da\,du\left[a^2\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + k^2\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + k\frac{\partial\varphi}{\partial u}\psi'(a)\right]\\ &+ du^2\left[a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Si $u =$ const. est l'équation des trajectoires orthogonales des hélices, il faut que le coefficient de $da\,du$ soit nul ou, comme $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ ne saurait être nul, que

$$(a^2 + k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial a} + k\psi'(a) = 0;$$

on déduit de là

$$\varphi = -\int\frac{k\psi'(a)da}{a^2 + k^2} + f(u),$$

$f(u)$ désignant une fonction arbitraire; ds^2 prend alors la forme

$$ds^2 = \mathrm{F}(a)da^2 + (a^2 + k^2)f'^2(u)du^2,$$

et, si l'on fait

$$f'(u)du = d\theta, \qquad \sqrt{\mathrm{F}(a)}da = d\sigma,$$

on a

$$(\alpha) \qquad ds^2 = d\sigma^2 + \mathrm{H}(\sigma)d\theta^2.$$

Mais, si l'on considère une surface de révolution, elle peut être représentée par les équations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varpi(r),$$

et l'on a

$$ds^2 = dr^2(1 + \varpi'^2) + r^2 d\theta^2.$$

Si l'on fait

$$dr\sqrt{1 + \varpi'^2} = d\sigma,$$

il vient

$$(\beta) \qquad ds^2 = d\sigma^2 + \Pi(\sigma)d\theta^2;$$

si alors on choisit $\varpi(r)$, de telle sorte que $\Pi(\sigma) = \mathrm{H}(\sigma)$, les valeurs (α) et (β) de ds seront les mêmes pour la surface hélicoïdale et la surface de révolution. Ces deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre. Donc *toute surface hélicoïdale est applicable sur une surface de révolution.* C'est le théorème de Bour.

Pour donner une application de ce théorème, considérons l'hélicoïde à plan directeur

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = k\varphi,$$

conoïde engendré par une droite qui s'appuie sur l'hélice représentée par les mêmes équations, où a est constant, et sur son axe en restant sans cesse perpendiculaire à cet axe; ici l'on a

$$\psi(a) = 0$$

et

$$\varphi = f(u);$$

par suite

$$ds^2 = da^2 + (a^2 + k^2)f'^2(u)du^2$$

ou

$$ds^2 = da^2 + (a^2 + k^2)d\varphi^2.$$

On appliquera l'hélicoïde en question sur la surface

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \varpi(r),$$

pour laquelle

$$ds^2 = dr^2(1 + \varpi'^2) + r^2 d\theta^2,$$

si l'on prend

$$da = dr\sqrt{1+\varpi'^2},$$

$$r = \sqrt{a^2+k^2}, \qquad a = \sqrt{r^2-k^2},$$

$$da = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-k^2}},$$

et, par suite,

$$\frac{r}{\sqrt{r^2-k^2}} = \sqrt{1+\varpi'^2} \qquad \text{ou} \qquad \varpi'(r) = \frac{k}{\sqrt{r^2-k^2}},$$

$$\varpi = k\log(r+\sqrt{r^2-k^2});$$

l'équation du méridien $z = \varpi(r)$ devient alors

$$z = k\log(r+\sqrt{r^2-k^2}) + \text{const.}$$

En prenant la constante égale à $-k\log k$, on trouve

$$r = \frac{e^{\frac{z}{k}}+e^{-\frac{z}{k}}}{2};$$

l'hélicoïde gauche à plan directeur est donc applicable sur l'alysséide ou surface engendrée par une chaînette qui tourne autour d'un axe perpendiculaire à son axe de symétrie.

Un calcul semblable montre que la surface hélicoïdale, engendrée par une droite qui se meut en restant parallèle à la base d'un cylindre de révolution et en rencontrant toujours une hélice tracée sur le cylindre tangentiellement au cylindre, est applicable sur un hyperboloïde de révolution ; dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre, les génératrices de l'hélicoïde s'appliquent sur celles de l'hyperboloïde (¹).

Enfin il est à peine nécessaire de faire observer que l'hélicoïde développable s'appliquerait sur un plan.

(¹) On verra plus loin dans la théorie des surfaces gauches que, si deux surfaces réglées sont applicables l'une sur l'autre, elles le sont génératrice sur génératrice.

XXXII. — Sur la construction des cartes. — Conservation des angles.

Le but de la construction des cartes de Géographie est de donner, sur un plan, une image plus ou moins ressemblante d'une figure tracée sur le système terrestre. Ce problème est un cas particulier du suivant :

Etant donnés une surface et un plan, faire correspondre à chaque point de la surface, un point déterminé du plan, de telle sorte que, un point décrivant une ligne sur la surface, le point correspondant sur le plan décrive aussi une ligne ayant avec la première une certaine relation donnée.

Pour établir entre un point M du plan et un point M′ de la surface un mode de correspondance, on peut se donner entre les coordonnées rectangulaires x, y du point M et les coordonnées curvilignes λ, μ du point M′ deux relations.

Proposons-nous de déterminer ces relations, de telle sorte que les figures infiniment petites correspondantes soient semblables ou, ce qui revient au même, de telle sorte, que les angles correspondants soient égaux (c'est-à-dire que les angles se conservent); les éléments infiniment petits correspondants devront alors être proportionnels, et, par suite, on devra avoir

$$(1) \qquad (dx^2 + dy^2) = k(\mathrm{L}\, d\lambda^2 + 2\mathrm{R}\, d\lambda\, d\mu + \mathrm{M}\, d\mu^2),$$

L, M, R désignant les coefficients du carré de la différentielle de l'arc de courbe tracé sur la surface.

Pour résoudre le problème, il faudrait poser

$$k\mathrm{L}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + 2k\mathrm{R}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + k\mathrm{M}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 = 1,$$

. . . .

et l'on aurait ainsi trois équations pour déterminer k, λ et μ. Jacobi indique la marche suivante : il pose

$$L\,d\lambda^2 + 2R\,d\lambda\,d\mu + M\,d\mu^2 = PQ,$$

P et Q désignant deux facteurs conjugués, et

$$k = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2;$$

puis il décompose l'équation (1) en

$$dx + dy\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})P,$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = (a - b\sqrt{-1})Q.$$

Pour résoudre le problème proposé, il suffit alors de choisir a et b, de telle sorte que $a + b\sqrt{-1}$, soit un facteur d'intégrabilité de P; $a - b\sqrt{-1}$ sera alors un facteur de Q et l'intégration donnera deux équations entre x, y, λ, μ.

Supposons qu'il s'agisse de représenter une sphère, le ds^2 sera de la forme

$$d\lambda^2 + \sin^2\lambda\,d\mu^2;$$

on devra donc poser

$$dx + dy\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})(d\lambda + \sqrt{-1}\sin\lambda\,d\mu),$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = (a - b\sqrt{-1})(d\lambda - \sqrt{-1}\sin\lambda\,d\mu);$$

on peut prendre $a + b\sqrt{-1} = \frac{1}{\sin\lambda}$, et alors on a

$$dx + dy\sqrt{-1} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda} + d\mu\sqrt{-1}$$

ou

$$x + y\sqrt{-1} = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda + \mu\sqrt{-1} + \text{const.};$$

on en conclut $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda = \alpha e^x$, $y = \mu + \beta$, α et β désignant deux constantes.

Dans ce système, dû à Mercator, les méridiens et les parallèles sont représentés par des lignes droites, les loxodromies sont représentées par des droites. Les cartes marines sont construites dans ce système.

Supposons que la Terre soit considérée comme un ellipsoïde à trois axes inégaux

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

on peut satisfaire à cette équation (*voir* t. II, p. 323) au moyen des formules

$$x=\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)a^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}},$$

$$y=\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},$$

$$z=\sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}};$$

on trouve alors

$$ds^2=\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)\lambda\,d\lambda^2}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}+\frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)\mu\,d\mu^2}{(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)}.$$

Le facteur d'intégrabilité est $\frac{1}{\sqrt{\lambda-\mu}}$, et l'on peut prendre

$$dx+dy\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}\,d\lambda$$
$$+\sqrt{\frac{\mu}{(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)}}\,d\mu\sqrt{-1};$$

x et y s'obtiennent alors par des quadratures elliptiques.

XXXII. — Projection stéréographique.

Pour représenter la sphère sur un plan, nous avons vu que, si l'on voulait conserver les angles, il fallait résoudre l'équation

$$dx^2+dy^2=k^2(d\lambda^2+\sin^2\lambda\,d\mu^2)$$

ou, en prenant des coordonnées polaires,

$$dr^2+r^2d\theta^2=k^2(d\lambda^2+\sin^2\lambda\,d\mu^2).$$

On peut prendre

$$d\theta=d\mu \qquad \text{ou} \qquad \theta=\mu,$$

$$dr=k\,d\lambda, \qquad r=k\sin\lambda;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda} \quad \text{ou} \quad r = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda,$$

$$k = \frac{r}{\sin\lambda}.$$

Alors les parallèles sont représentés par des cercles et les méridiens par des droites. Il est facile de s'assurer que le mode de représentation auquel on est ainsi conduit est une projection stéréographique, et que la figure plane n'est autre chose qu'une transformée par rayons vecteurs réciproques de la figure tracée sur la sphère : le pôle de la transformation est alors à l'un des pôles terrestres.

XXXIII. — Conservation des aires.

Il peut y avoir avantage à conserver les aires dans la représentation des surfaces. Or l'élément d'aire en coordonnées curvilignes est

$$\sqrt{L}\,d\lambda\,\sqrt{M}\,d\mu\sin\theta,$$

θ désignant l'angle des deux lignes coordonnées en λ, μ. Or on a

$$\cos\theta = -\frac{R}{\sqrt{LM}}, \qquad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{LM - R^2}}{\sqrt{LM}},$$

l'aire élémentaire devient alors $\sqrt{LM - R^2}\,d\lambda\,d\mu$, et les aires sur la carte seront conservées si l'on a

$$dx\,dy = \sqrt{LM - R^2}\,d\lambda\,d\mu.$$

L'aire en coordonnées sphériques a pour élément

$$\sin\lambda\,d\lambda\,d\mu.$$

On peut prendre $x = \mu$, $y = \cos\lambda$; les méridiens et les parallèles seront alors représentés par des droites : ce mode de représentation n'est pas employé.

On peut prendre des coordonnées polaires dans le plan et

placer l'origine au point qui correspond au pôle nord. Alors on devra avoir, en appelant r et θ les coordonnées polaires du point qui correspond à λ, μ,

$$r\,d\theta\,dr = \sin\lambda\,d\lambda\,d\mu,$$

et l'on satisfera à cette formule en prenant

$$r\,dr = \sin\lambda\,d\lambda, \qquad d\theta = d\mu$$

ou bien

$$r = \sqrt{-2\cos\lambda + \text{const.}}, \qquad \theta = \mu,$$

ou, si l'on veut,

$$r = 2\sqrt{\frac{1-\cos\lambda}{2}} = 2\sin\frac{1}{2}\lambda.$$

Ce mode de représentation est appelé *projection de Lorgna*, les parallèles sont représentés par des cercles de rayon égal à la corde qui joint le pôle à un point du parallèle, les méridiens sont représentés par des rayons de ces cercles.

XXXIV. — De la périmorphie.

La *périmorphie* est un mode particulier de représentation des figures dans lequel un point est donné par ses coordonnées relatives à trois axes rectangulaires mobiles; ces trois axes sont l'un normal à une surface dite *surface de référence*, et les deux autres tangents à un système de lignes coordonnées tracées sur la surface. Ces axes sont dits *axes instantanés*.

Le système est supposé d'ailleurs rapporté à des *axes fixes*. La périmorphie a surtout été étudiée par MM. O. Bonnet, Codazzi, Laguerre et Ribaucour.

Formules fondamentales.

Les formules fondamentales ont été établies par MM. O. Bonnet et Codazzi.

Soient a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' neuf cosinus définissant

les directions des trois axes mobiles rectangulaires Ox_1, Oy_1, Oz_1 par rapport à trois axes fixes Ox, Oy, Oz passant par le point O. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque invariablement lié aux axes mobiles par rapport aux axes fixes et x_1, y_1, z_1 les coordonnées par rapport aux axes mobiles; on aura les formules connues

$$(1)\quad \begin{cases} x = ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \\ y = bx_1 + b'y_1 + b''z_1, \\ z = cx_1 + c'y_1 + c''z_1. \end{cases}$$

Supposons maintenant les neuf cosinus fonctions de deux paramètres λ, μ; faisant varier ces paramètres, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} dx = x_1\,da + y_1\,da' + z_1\,da'', \\ dy = x_1\,db + y_1\,db' + z_1\,db'', \\ dz = x_1\,dc + y_1\,dc' + z_1\,dc''. \end{cases}$$

Multiplions la première de ces équations par a, la seconde par b, la dernière par c'' et ajoutons-les; désignons par du, dv, dw les projections du déplacement dx, dy, dz sur les axes mobiles. Le premier membre de la formule résultante sera du, et, en observant que $a\,da + b\,db + c\,dc$ est nul, comme étant la différentielle de $a^2 + b^2 + c^2$ qui est égal à un, on aura

$$(3)\quad \begin{cases} du = z_1(Q_1\,d\lambda + Q_2\,d\mu) - y_1(R_1\,d\lambda + R_2\,d\mu), \\ dv = x_1(R_1\,d\lambda + R_2\,d\mu) - z_1(P_1\,d\lambda + P_2\,d\mu), \\ dw = y_1(P_1\,d\lambda + P_2\,d\mu) - x_1(Q_1\,d\lambda + Q_2\,d\mu), \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(4)\quad \begin{cases} P_1\,d\lambda + P_2\,d\mu = a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc' \\ \qquad\qquad\qquad\; = -a'\,da'' - b'\,db'' - c'\,dc'', \\ Q_1\,d\lambda + Q_2\,d\mu = a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' \\ \qquad\qquad\qquad\; = -a''\,da - b''\,db - c''\,dc, \\ R_1\,d\lambda + R_2\,d\mu = a'\,da + b'\,db + c'\,dc \\ \qquad\qquad\qquad\; = -a\,da' - b\,db' - c\,dc'; \end{cases}$$

Ce qui donne le droit d'écrire ces équations, la première par

exemple, c'est que, en différentiant la relation

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

on a

$$a'da'' + b'db'' + c'dc'' + a''da' + b''db' + c''dc' = 0;$$

en vertu de ((4)), on a

$$\begin{aligned} a\,da + b\,db + c\,dc &= 0,\\ a'\,da + b'\,db + c'\,dc &= (R_1 d\lambda + R_2 d\mu),\\ a''\,da + b''\,db + c''\,dc &= -(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu); \end{aligned}$$

par suite,

$$((5))\quad \left\{\begin{aligned} da &= a'(R_1 d\lambda + R_2 d\mu) - a''(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu),\\ db &= b'(R_1 d\lambda + R_2 d\mu) - b''(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu),\\ dc &= c'(R_1 d\lambda + R_2 d\mu) - c''(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu);\\ da' &= a''(P_1 d\lambda + P_2 d\mu) - a(R_1 d\lambda + R_2 d\mu),\\ db' &= b''(P_1 d\lambda + P_2 d\mu) - b(R_1 d\lambda + R_2 d\mu),\\ dc' &= c''(P_1 d\lambda + P_2 d\mu) - c(R_1 d\lambda + R_2 d\mu);\\ da'' &= a(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu) - a'(P_1 d\lambda + P_2 d\mu),\\ db'' &= b(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu) - b'(P_1 d\lambda + P_2 d\mu),\\ dc'' &= c(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu) - c'(P_1 d\lambda + P_2 d\mu). \end{aligned}\right.$$

Les quantités P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2 étant connues, ces formules feront connaître les neuf cosinus. Toutefois ces formules sont aux différentielles totales par rapport aux neuf cosinus et, pour obtenir la condition de leur intégrabilité complète (t. VI, p. 114) il faudra, dans les formules

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(R_1 a' - Q_1 a'') = \frac{\partial}{\partial\lambda}(R_2 a' - Q_2 a''),$$

remplacer les dérivées partielles de a', b', ... par leurs valeurs tirées de ((5)); on a ainsi

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &a'\left(\frac{\partial R_1}{\partial\mu} - \frac{\partial R_2}{\partial\lambda} + P_2 Q_1 - Q_2 P_1\right)\\ &\quad - a''\left(\frac{\partial Q_1}{\partial\mu} - \frac{\partial Q_2}{\partial\lambda} + P_1 R_2 - P_2 R_1\right) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

équations qui reviennent aux suivantes

$$((6))\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial \mu} - \dfrac{\partial P_2}{\partial \lambda} + Q_2 R_1 - R_2 Q_1 = 0, \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial \mu} - \dfrac{\partial Q_2}{\partial \lambda} + R_2 P_1 - P_2 R_1 = 0, \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial \mu} - \dfrac{\partial R_2}{\partial \lambda} + P_2 Q_1 - Q_2 P_1 = 0. \end{cases}$$

Lorsque les formules ((6)) seront identiquement satisfaites, les formules (A) le seront, et les équations ((5)) seront complètement intégrables; on pourra alors choisir les constantes d'intégration, de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1; & ab + a'b' + a''b'' &= 0. \end{aligned}$$

Il suffira, en effet, pour qu'il en soit ainsi, de faire en sorte que ces équations soient satisfaites pour les valeurs initiales des variables a, b, ...; car de ((5)) on tire

$$a\,da + a'\,da' + a''\,da'' = 0$$

ou

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \text{const.};$$

on en tire de même

$$b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc'' + c\,db + c'\,db' + c''\,dc'' = 0$$

ou

$$bc + b'c' + b''c'' = \text{const.}$$

Ainsi, en résumé, la donnée des neuf cosinus peut être remplacée par la donnée des six quantités P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2, pourvu qu'elles satisfassent aux formules ((6)). Ces formules sont dues à M. Codazzi.

XXXV. — Second groupe de formules.

Supposons maintenant que le point O, origine des axes mobiles, se déplace sur une surface de référence pour laquelle le ds soit représenté par la formule

$$ds^2 = L\,d\lambda^2 + M\,d\mu^2,$$

l'axe des x_1 restant tangent à la ligne coordonnée $\mu =$ const. et l'axe des y_1 à la ligne coordonnée $\lambda =$ const., l'axe des z_1 coïncidera avec la normale à la surface. Appelons maintenant x, y, z les coordonnées du point O par rapport à trois axes fixes; on aura

$$((7))\qquad \begin{cases} dx = a\sqrt{L}\,d\lambda + a'\sqrt{M}\,d\mu, \\ dy = b\sqrt{L}\,d\lambda + b'\sqrt{M}\,d\mu, \\ dz = c\sqrt{L}\,d\lambda + c'\sqrt{M}\,d\mu; \end{cases}$$

les seconds membres de ces équations sont, comme l'on peut s'en assurer, des différentielles exactes. En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$(m)\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}(a\sqrt{L}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(a'\sqrt{M}),$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\sqrt{L}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\partial x}{\partial\mu}\sqrt{M}\right)$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}.$$

Ceci nous conduit à une relation d'identité entre les quantités $P_1, Q_1, \ldots$. La formule (m) peut en effet s'écrire

$$a\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu} + \sqrt{L}\frac{\partial a}{\partial\mu} = a'\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\lambda} + \sqrt{M}\frac{\partial a'}{\partial\lambda'}$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial a}{\partial \mu}$, $\frac{\partial a'}{\partial \lambda}$ par leurs valeurs tirées de ((5)),

$$a\left(\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}+R_1\sqrt{M}\right)-a'\left(\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\lambda}-R_2\sqrt{L}\right)-a''(Q_2\sqrt{L}+P_1\sqrt{M})=0.$$

Cette formule et ses analogues donnent

$$((8))\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}+R_1\sqrt{M}=0,\\&\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\lambda}-R_2\sqrt{L}=0,\\&Q_2\sqrt{L}+P_1\sqrt{M}=0.\end{aligned}\right.$$

Ces identités sont encore de M. Codazzi. Les formules ((7)) intégrées feront connaître la surface lieu du point O.

XXXVI. — Interprétation des quantités P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2.

On a [formule ((4))]

$$(a)\qquad P_1\,d\lambda+P_2\,d\mu=a''\,da'+b''\,db'+c''\,dc';$$

or

$$a'=\frac{\partial x}{\sqrt{M}\,\partial\mu},$$

donc

$$(b)\qquad\left\{\begin{aligned}da'&=\frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\,d\lambda+\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\,d\mu\right)+a'\sqrt{M}\,d\frac{1}{\sqrt{M}},\\db'&=\frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}\,d\lambda+\frac{\partial^2 y}{\partial\mu^2}\,d\mu\right)+b'\sqrt{M}\,d\frac{1}{\sqrt{M}},\\dc'&=\frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}\,d\lambda+\frac{\partial^2 z}{\partial\mu^2}\,d\mu\right)+c'\sqrt{M}\,d\frac{1}{\sqrt{M}}.\end{aligned}\right.$$

On en déduit, en vertu de (a), en multipliant ces équations

par a'', b'', c'' et en ajoutant

$$P_1 d\lambda + P_2 d\mu = \frac{1}{\sqrt{M}}\left(\sum a'' \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\,d\lambda + \sum a'' \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\,d\mu\right);$$

mais on a

$$a'' = \frac{1}{\sqrt{LM}}\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu} - \frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right);$$

donc, en adoptant les notations du Chapitre précédent,

$$((9))\qquad \begin{cases} P_1 d\lambda + P_2 d\mu = \dfrac{1}{M\sqrt{L}}(r\,d\lambda + m\,d\mu), \\ Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu = \dfrac{1}{L\sqrt{M}}(l\,d\lambda + r\,d\mu). \end{cases}$$

Les formules (b) donnent aussi, toujours en vertu de ((4)),

$$-R_1 d\lambda - R_2 d\mu = \frac{1}{\sqrt{LM}}\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\mu\right).$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{LM}}\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\lambda + \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\mu\right);$$

on en déduit

$$((10))\qquad R_1 d\lambda + R_2 d\mu = -\frac{1}{2\sqrt{LM}}\left(\frac{\partial L}{\partial\mu}\,d\lambda - \frac{\partial M}{\partial\lambda}\,d\mu\right);$$

alors, en vertu de ((9)) et ((10)),

$$((11))\qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{r}{M\sqrt{L}}, & P_2 = \dfrac{m}{M\sqrt{L}}, \\ Q_1 = -\dfrac{l}{L\sqrt{M}}, & Q_2 = \dfrac{-r}{L\sqrt{M}}, \\ R_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{LM}}\dfrac{\partial L}{\partial\mu}, & R_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{LM}}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}. \end{cases}$$

Ces deux dernières font déjà partie du groupe ((8)). Les formules ((6)), en vertu de ces équations ((11)) peuvent alors

se mettre sous la forme

$$((12))\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\dfrac{r}{M\sqrt{L}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{m}{M\sqrt{L}}\right)+\dfrac{1}{2LM\sqrt{L}}\left(r\dfrac{\partial L}{\partial\mu}+l\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\right)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{r}{L\sqrt{M}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\dfrac{l}{L\sqrt{M}}\right)+\dfrac{1}{2LM\sqrt{M}}\left(m\dfrac{\partial L}{\partial\mu}+r\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\right)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{ML}}\dfrac{\partial L}{\partial\mu}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{1}{\sqrt{ML}}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\right)+2\dfrac{lm-r^2}{LM\sqrt{LM}}=0.\end{cases}$$

Ces formules se simplifient quand $r=0$, c'est-à-dire quand on prend pour lignes coordonnées les lignes de courbure de la surface de référence.

XXXVII. — Troisième groupe de formules.

Appelons X, Y, Z les coordonnées d'un point par rapport à des axes fixes, ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport aux axes instantanés définis plus haut, x, y, z les coordonnées de l'origine des axes instantanés, on aura

$$(n)\quad \begin{cases} X=x+a\xi+a'\eta+a''\zeta,\\ Y=y+b\xi+b'\eta+b''\zeta,\\ Z=z+c\xi+c'\eta+c''\zeta,\end{cases}$$

et, en différentiant,

$$dX=dx+a\,d\xi+a'\,d\eta+a''\,d\zeta+\xi\,da+\eta\,da'+\zeta\,da'',$$

. . . .

Si l'on multiplie ces équations par a, b, c, et si on les ajoute, on trouve, en appelant du, dv, dw les projections du déplacement du point ξ, η, ζ sur les axes mobiles

$$du=a\,dx+b\,dy+c\,dz+d\xi+(Q_1\,d\lambda+Q_2\,d\mu)\zeta-(R_1\,d\lambda+R_2\,d\mu)\eta.$$

Or $a\,dx+b\,dy+c\,dz$ est la projection du déplacement de l'origine sur l'axe instantané des x : en vertu de ((7)), il est égal à $\sqrt{L}\,d\lambda$; on a donc

$$((13))\quad \begin{cases} du=\sqrt{L}\,d\lambda+d\xi+(Q_1\,d\lambda+Q_2\,d\mu)\zeta-(R_1\,d\lambda+R_2\,d\mu)\eta,\\ dv=\sqrt{M}\,d\mu+d\eta+(R_1\,d\lambda+R_2\,d\mu)\xi-(P_1\,d\lambda+P_2\,d\mu)\zeta,\\ dw=d\zeta+(P_1\,d\lambda+P_2\,d\mu)\eta-(Q_1\,d\lambda+Q_2\,d\mu)\xi.\end{cases}$$

En vertu des formules ((11)), ce groupe se transforme dans le suivant :

$$((14))\quad\left\{\begin{aligned}
du &= d\lambda\left(\sqrt{L}+\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}-\zeta\frac{l}{L\sqrt{M}}+\eta\frac{1}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial\mu}\right)\\
&\quad+d\mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial\mu}-\zeta\frac{r}{L\sqrt{M}}-\eta\frac{1}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\right),\\
dv &= d\lambda\left(\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}-\xi\frac{1}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial\mu}-\zeta\frac{r}{M\sqrt{L}}\right)\\
&\quad+d\mu\left(\sqrt{M}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}+\xi\frac{1}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial\lambda}-\zeta\frac{m}{M\sqrt{L}}\right),\\
dw &= d\lambda\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}+\eta\frac{r}{M\sqrt{L}}+\xi\frac{l}{L\sqrt{M}}\right)\\
&\quad+d\mu\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}+\eta\frac{m}{M\sqrt{L}}+\xi\frac{r}{L\sqrt{M}}\right).
\end{aligned}\right.$$

A ces formules, on peut joindre d'autres formules qui font connaître les variations des coordonnées d'un point fixe de l'espace quand on suppose que les axes instantanés se sont déplacés infiniment peu.

Pour obtenir ces formules, on différentie les formules (n) en laissant X, Y, Z constants; on a alors

$$\begin{aligned}
0 &= dx + a\,d\xi + a'\,d\eta + a''\,d\zeta + \xi\,da + \eta\,da' + \zeta\,da'',\\
0 &= dy + b\,d\xi + b'\,d\eta + b''\,d\zeta + \xi\,db + \eta\,db' + \zeta\,db'',\\
0 &= dz + c\,d\xi + c'\,d\eta + c''\,d\zeta + \xi\,dc + \eta\,dc' + \zeta\,dc'';
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en multipliant la première par a, la deuxième par b, la troisième par c et en ajoutant,

$$\begin{aligned}
0 &= a\,dx + b\,dy + c\,dz + d\xi\\
&\quad - \eta(R_1\,d\lambda + R_2\,d\mu) + \zeta(Q_1\,d\lambda + Q_2\,d\mu),\\
0 &= a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz + d\eta\\
&\quad - \zeta(P_1\,d\lambda + P_2\,d\mu) + \xi(R_1\,d\lambda + R_2\,d\mu),\\
0 &= a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz + d\zeta\\
&\quad - \xi(Q_1\,d\lambda + Q_2\,d\mu) + \eta(P_1\,d\lambda + P_2\,d\mu).
\end{aligned}$$

Calculant $a\,dx + b\,dy + c\,dz + \ldots$ au moyen des formules ((7))

et remplaçant les coefficients de ξ, η, ζ par leurs valeurs ((9)) et ((10)), on trouve

$$
\begin{aligned}
0 &= \sqrt{L}\,d\lambda + d\xi - \eta\,\frac{1}{2\sqrt{LM}}\left(-\frac{\partial L}{\partial\mu}\,d\lambda + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\,d\mu\right) \\
&\quad - \frac{\zeta}{L\sqrt{M}}\,(l\,d\lambda + r\,d\mu), \\
0 &= \sqrt{M}\,d\mu + d\eta - \zeta\,\frac{1}{M\sqrt{L}}\,(r\,d\lambda + m\,d\mu) \\
&\quad + \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\left(-\frac{\partial L}{\partial\mu}\,d\lambda + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\,d\mu\right), \\
0 &= d\zeta + \frac{\xi}{L\sqrt{M}}\,(l\,d\lambda + r\,d\mu) + \frac{\eta}{M\sqrt{L}}\,(r\,d\lambda + m\,d\mu),
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
((15))\quad
\left\{
\begin{aligned}
d\xi &= -\,d\lambda\left(\sqrt{L} + \frac{\eta}{2\sqrt{LM}}\,\frac{\partial L}{\partial\mu} - \frac{\zeta l}{L\sqrt{M}}\right) \\
&\quad + d\mu\left(\frac{\eta}{2\sqrt{LM}}\,\frac{\partial M}{\partial\lambda} + \frac{r\zeta}{L\sqrt{M}}\right), \\
d\eta &= \,d\lambda\left(\frac{r\zeta}{m\sqrt{L}} + \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\,\frac{\partial L}{\partial\mu}\right) \\
&\quad - d\mu\left(\sqrt{M} - \frac{m\zeta}{M\sqrt{L}} + \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\,\frac{\partial M}{\partial\lambda}\right), \\
d\zeta &= -\,d\lambda\left(\frac{l\xi}{L\sqrt{M}} + \frac{r\eta}{M\sqrt{L}}\right) - d\mu\left(\frac{r\xi}{L\sqrt{M}} + \frac{m\eta}{M\sqrt{L}}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

XXXVIII. — Recherche, à l'aide de la périmorphie, des surfaces applicables sur une surface donnée.

Je rappelle d'abord ce que l'on appelle *surfaces applicables* l'une sur l'autre. Étant données deux surfaces

$$(1')\qquad f(x, y, z) = 0,$$

$$(2')\qquad F(x', y', z') = 0,$$

si l'on établit une relation arbitraire entre x, y, z; x', y', z', telle que $S = 0$, on en déduira x, y, z en fonction de x', y', z' ou *vice versa,* et à chaque point de la surface (1'), *cor-*

respondra un point de la surface (2′); si alors deux arcs quelconques infiniment petits correspondants sont égaux, on dira que les deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre.

Ceci posé, la surface (1′) peut être représentée par trois équations, telles que

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \qquad y = \chi(\lambda, \mu), \qquad z = \psi(\lambda, \mu),$$

et, par suite, comme x', y', z' coordonnées du point correspondant de x, y, z peuvent être calculées en fonction de x, y, z, on pourra les supposer de la forme

$$x' = \varphi'(\lambda, \mu), \qquad y' = \chi'(\lambda, \mu), \qquad z' = \psi'(\lambda, \mu).$$

Or, en appelant ds un arc de courbe tracé sur la surface (1′). on a, en conservant les notations déjà employées,

$$ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2 + 2\mathrm{R}\, d\lambda\, d\mu + \mathrm{M}\, d\mu^2;$$

l'arc correspondant à ds étant désigné par ds', on aura

$$ds'^2 = \mathrm{L}' d\lambda^2 + 2\mathrm{R}' d\lambda\, d\mu + \mathrm{M}' d\mu^2,$$

L′, M′, R′ désignant pour la surface (2′) les quantités analogues à L, M, R. Si l'on veut que $ds = ds'$, quels que soient les points correspondants (x, y, z) et (x', y', z'), il faudra que $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$.

Ainsi le problème qui consiste à chercher les surfaces applicables sur une surface donnée revient à trouver les surfaces pour lesquelles $\mathrm{L}' = \mathrm{L}$, $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$, $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$, ou, si l'on veut, pour lesquelles, L, M, R étant données, on a

$$(3') \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 = \mathrm{L}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \mathrm{R}, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 = \mathrm{M}$$

ou, si l'on veut, le problème consiste, étant donnée une solution particulière des équations (3′) aux dérivées partielles, trouver les autres solutions.

Pour intégrer ces équations (3′), nous allons chercher l'expression des neuf cosinus a, a', a'', b, b', ...; les formules ((8)) de la page 172 donnent d'abord R_1, R_2 et P_1 ou Q_2 en fonction de L, M, en supposant $\mathrm{R} = 0$, ce que nous pou-

vons toujours faire. Les formules ((6)) de la page 170 donnent alors les trois autres quantités Q_2 ou P_1, P_2 et Q_1 au moyen d'une quadrature.

Les quantités P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2 une fois calculées, les équations ((5)) de la page 169, considérées comme des équations aux différentielles totales, font connaître les neuf cosinus $a, a', \ldots$; enfin les trois équations ((7)) de la page 171, également aux différentielles totales, feront x, y, z en fonction de λ et μ.

En résumé, *pour trouver une surface applicable sur une surface donnée, on commencera par calculer* P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2, *au moyen des formules*

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \mu}, \qquad R_2 = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\partial \sqrt{M}}{\partial \lambda},$$

$$Q_2 \sqrt{L} + P_1 \sqrt{M} = 0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \mu} - \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + Q_2 R_1 - R_2 Q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \mu} - \frac{\partial Q_2}{\partial \lambda} + R_2 P_1 - P_2 R_1 = 0,$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \mu} - \frac{\partial R_2}{\partial \lambda} + P_2 Q_1 - Q_2 P_1 = 0;$$

puis on intégrera les neuf équations différentielles totales suivantes (de telle sorte que l'on ait $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \ldots$*)*:

$$da = a'(R_1 d\lambda + R_2 d\mu) - a''(Q_1 d\lambda + Q_2 d\mu),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

puis les suivantes qui feront connaître x, y, z, *et résoudront le problème*

$$dx = a\sqrt{L}\, d\lambda + a'\sqrt{M}\, d\mu,$$
$$dy = b\sqrt{L}\, d\lambda + b'\sqrt{M}\, d\mu,$$
$$dz = c\sqrt{L}\, d\lambda + c'\sqrt{M}\, d\mu.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Les équations

$$x = a \cos \mu \sin \lambda,$$
$$y = b \sin \mu \sin \lambda,$$
$$z = c \cos \lambda$$

représentent un ellipsoïde (les lignes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, sont conjuguées); former l'équation des lignes de courbure.

2. Les équations

$$x = b \operatorname{sn}(\lambda, k) \operatorname{dn}(\mu, l),$$
$$y = a \operatorname{cn}(\lambda, k) \operatorname{cn}(\mu, l),$$
$$z = a \operatorname{dn}(\lambda, k) \operatorname{sn}(\mu, l),$$

où

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}, \qquad l^2 = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{b^2(c^2 - a^2)},$$

représentent la surface de l'onde

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1.$$

3. Les images sphériques des lignes de longueur nulle sur une surface dans laquelle deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires sont les génératrices de la sphère.

(O. Bonnet.)

4. Si l'on considère les surfaces sur lesquelles l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{u} + \frac{dv^2}{v},$$

l'équation des géodésiques est

$$\left(\frac{\cos i}{\sqrt{v}}\right)^3 + \left(\frac{\sin i}{\sqrt{u}}\right)^3 = \text{const.},$$

i désignant l'angle de la géodésique avec la ligne $v = \text{const.}$

(Laguerre.)

5. Les équations

$$x = a(\lambda - \alpha)^m(\mu - \alpha)^m,$$
$$y = b(\lambda - \beta)^m(\mu - \beta)^m,$$
$$z = c(\lambda - \gamma)^m(\mu - \gamma)^m$$

représentent ce que l'on appelle une *surface tétraédrale* : on propose de trouver les lignes asymptotiques; a, α, b, β, c, γ sont des constantes.

CHAPITRE IV.

DES COORDONNÉES CURVILIGNES DANS L'ESPACE.

I. — Préliminaires.

Si l'on considère trois familles de surfaces

$$(\alpha) \qquad \varphi(x, y, z) = \lambda, \qquad \chi(x, y, z) = \mu, \qquad \psi(x, y, z) = \nu,$$

ces surfaces constitueront un *système de coordonnées curvilignes,* comme il a été expliqué plus haut; en ce sens que, quand on se donnera λ, μ, ν, on tirera des équations (α) des valeurs déterminées pour x, y, z, qui seront les coordonnées des intersections de trois surfaces particulières des familles en question; λ, μ, ν étant donc donnés, un certain nombre de points de l'espace sont simultanément déterminés. Réciproquement, les coordonnées ordinaires x, y, z d'un point étant données, ce point est bien déterminé et les équations (α) font connaître les *coordonnées curvilignes* λ, μ, ν de ce point.

Les formules (α) sont de véritables formules de transformation de coordonnées, et l'on peut concevoir des formules de transformation plus générales de la forme

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) &= 0, \\ \mathrm{X}(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) &= 0, \\ \Psi(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir les formules propres à passer des coordonnées rectilignes aux coordonnées curvilignes et *vice versa,* dans les formules qui contiennent des dérivées partielles relatives aux variables x, y, z, λ, μ, ν. Pour le

numérotage des formules, nous emploierons deux notations; les numéros entre parenthèses renverront à des formules du Chapitre précédent; les numéros entre crochets se suivront dans tous les paragraphes et seront relatifs à des formules de ce Chapitre seulement; enfin les formules dont nous ne ferons usage que dans un même paragraphe seront représentées par des lettres entre parenthèses. Cela nous permettra d'employer une notation uniforme dans ces Chapitres.

II. — Transformation des coordonnées.

Nous poserons

$$[1]\quad \begin{cases} \sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 = \mathrm{L}, & \sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 = \mathrm{M}, \quad \sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial\nu}\right)^2 = \mathrm{N}, \\ \sum\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial x}{\partial\nu} = \mathrm{P}, & \sum\dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = \mathrm{Q}, \quad \sum\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial x}{\partial\mu} = \mathrm{R}. \end{cases}$$

Nous avons les formules suivantes (p. 92) :

$$[2]\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial\lambda} = 1, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\mu} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\mu} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial\mu} = 0, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\nu} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\nu} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial\nu} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$[3]\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial\nu}{\partial x} = 1, \\ \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial\nu}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial z} + \dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} + \dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial\nu}{\partial z} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De ces deux groupes de formules on déduit les suivants, où

l'on a posé

[4] $$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \mu, \nu)}, \qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)},$$

[5] $$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial\lambda} = \Delta\frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(y, z)}, & \frac{\partial x}{\partial\mu} = \Delta\frac{\partial(\nu, \lambda)}{\partial(y, z)}, & \frac{\partial x}{\partial\nu} = \Delta\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(y, z)}, \\ \frac{\partial y}{\partial\lambda} = \Delta\frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(z, x)}, & \frac{\partial y}{\partial\mu} = \Delta\frac{\partial(\nu, \lambda)}{\partial(z, x)}, & \frac{\partial y}{\partial\nu} = \Delta\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(z, x)}, \\ \frac{\partial z}{\partial\lambda} = \Delta\frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial z}{\partial\mu} = \Delta\frac{\partial(\nu, \lambda)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial z}{\partial\nu} = \Delta\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(x, y)}; \end{array}\right.$$

[6] $$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(y, z)}{\partial(\mu, \nu)}, & \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(z, x)}{\partial(\mu, \nu)}, & \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, \nu)}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(y, z)}{\partial(\nu, \lambda)}, & \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(z, x)}{\partial(\nu, \lambda)}, & \frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(x, y)}{\partial(\nu, \lambda)}, \\ \frac{\partial\nu}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(y, z)}{\partial(\lambda, \mu)}, & \frac{\partial\nu}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(z, x)}{\partial(\lambda, \mu)}, & \frac{\partial\nu}{\partial z} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)}. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

[7] $$\left\{\begin{array}{lll} \sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 = A, & \sum\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 = B, & \sum\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2 = C, \\ \sum\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x} = D, & \sum\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = E, & \sum\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} = F. \end{array}\right.$$

on trouve, en formant Δ^2 et $\frac{1}{\Delta^2}$ par la règle de la multiplication des déterminants,

[8] $$\left\{\begin{array}{l} \Delta^2 = LMN + 2PQR - LP^2 - MQ^2 - NR^2, \\ \frac{1}{\Delta^2} = ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2. \end{array}\right.$$

III. — Systèmes orthogonaux. — Transformation.

La théorie des coordonnées curvilignes présente de grandes difficultés que l'on élimine en partie en ne considérant que des coordonnnées orthogonales; dans ces systèmes, on suppose que les surfaces, qui par leur intersection déterminent

les divers points de l'espace, se coupent orthogonalement ou, si l'on veut, à angle droit; alors

$$P, \quad Q, \quad R; \qquad D, \quad E, \quad F$$

sont nuls : nous supposerons dans la suite qu'il en est toujours ainsi. Les formules $P=0$, $Q=0$, $R=0$ peuvent s'écrire

$$[9] \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}=0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}=0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}=0.$$

De ces formules et des premières formules [1], à savoir

$$[10] \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2=L, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2=M, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2=N,$$

on tire (d'abord de [9])

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}:\frac{\partial(y,z)}{\partial(\mu,\nu)}=\frac{\partial y}{\partial \lambda}:\frac{\partial(z,x)}{\partial(\mu,\nu)}=\frac{\partial z}{\partial \lambda}:\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)};$$

puis, faisant la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs et des dénominateurs, en vertu de [10], on trouve ces rapports égaux à

$$\pm\sqrt{L}:\left[\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2-\sum\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right]^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire à

$$\pm\sqrt{\frac{L}{MN}}.$$

On a donc, en choisissant convenablement les signes,

$$[11] \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(\mu,\nu)}\sqrt{\frac{L}{MN}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda}=\frac{\partial(z,x)}{\partial(\mu,\nu)}\sqrt{\frac{L}{MN}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \mu}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}\sqrt{\frac{L}{MN}},\\ &\frac{\partial x}{\partial \mu}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(\nu,\lambda)}\sqrt{\frac{M}{LN}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu}=\frac{\partial(z,x)}{\partial(\nu,\lambda)}\sqrt{\frac{M}{LN}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \mu}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\nu,\lambda)}\sqrt{\frac{M}{LN}},\\ &\frac{\partial x}{\partial \nu}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(\lambda,\mu)}\sqrt{\frac{N}{LM}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu}=\frac{\partial(z,x)}{\partial(\lambda,\mu)}\sqrt{\frac{N}{LM}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)}\sqrt{\frac{N}{LM}}, \end{aligned} \right.$$

$$[12] \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\lambda,\mu,\nu)}=\Delta=LMN.$$

Si l'on tire des formules [11] les déterminants partiels de x, y, z relatifs à λ, μ, ν pour les porter dans [6], on trouve

[13] $$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial x}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{1}{L}\frac{\partial y}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{1}{L}\frac{\partial z}{\partial\lambda}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{1}{M}\frac{\partial x}{\partial\mu}, & \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{1}{M}\frac{\partial y}{\partial\mu}, & \frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{1}{M}\frac{\partial z}{\partial\mu}, \\ \frac{\partial\nu}{\partial x} = \frac{1}{N}\frac{\partial x}{\partial\nu}, & \frac{\partial\nu}{\partial y} = \frac{1}{N}\frac{\partial y}{\partial\nu}, & \frac{\partial\nu}{\partial z} = \frac{1}{N}\frac{\partial z}{\partial\nu}; \end{array}\right.$$

les coordonnées étant orthogonales, on a D, E, F = 0, c'est-à-dire

[14] $$\sum\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0, \qquad \sum\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0, \qquad \sum\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0,$$

et les formules suivantes comprises dans le groupe [7] :

[15] $$\sum\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 = A, \qquad \sum\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 = B, \qquad \sum\left(\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2 = C.$$

Un calcul tout semblable à celui que nous venons de faire donne

[16] $$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial(\mu,\nu)}{\partial(y,z)}\sqrt{\frac{A}{BC}}, & \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial(\mu,\nu)}{\partial(z,x)}\sqrt{\frac{A}{BC}}, & \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{\partial(\mu,\nu)}{\partial(x,y)}\sqrt{\frac{A}{BC}}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial(\nu,\lambda)}{\partial(y,z)}\sqrt{\frac{B}{AC}}, & \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial(\nu,\lambda)}{\partial(z,x)}\sqrt{\frac{B}{BC}}, & \frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{\partial(\nu,\lambda)}{\partial(x,y)}\sqrt{\frac{B}{AC}}, \\ \frac{\partial\nu}{\partial x} = \frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(y,z)}\sqrt{\frac{C}{AB}}, & \frac{\partial\nu}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(z,x)}\sqrt{\frac{C}{AB}}, & \frac{\partial\nu}{\partial z} = \frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(x,y)}\sqrt{\frac{C}{AB}}; \end{array}\right.$$

la comparaison de ces formules avec [5] donne

[17] $$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{1}{A}\frac{\partial\lambda}{\partial x}, & \frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{1}{B}\frac{\partial\mu}{\partial x}, & \frac{\partial x}{\partial\nu} = \frac{1}{C}\frac{\partial\nu}{\partial x}, \\ \frac{\partial y}{\partial\lambda} = \frac{1}{A}\frac{\partial\lambda}{\partial y}, & \frac{\partial y}{\partial\mu} = \frac{1}{B}\frac{\partial\mu}{\partial y}, & \frac{\partial y}{\partial\nu} = \frac{1}{C}\frac{\partial\nu}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial\lambda} = \frac{1}{A}\frac{\partial\lambda}{\partial z}, & \frac{\partial z}{\partial\mu} = \frac{1}{B}\frac{\partial\mu}{\partial z}, & \frac{\partial z}{\partial\nu} = \frac{1}{C}\frac{\partial\nu}{\partial z}; \end{array}\right.$$

la comparaison de ces formules avec [13] donne

[18] $$L = \frac{1}{A}, \qquad M = \frac{1}{B}, \qquad N = \frac{1}{C}.$$

IV. — Calcul des dérivées secondes des coordonnées à l'aide des dérivées premières de L, M, N.

Différentions, par rapport à λ, μ, ν, les formules [9] et [10] : nous avons dix-huit formules contenant les dix-huit dérivées secondes des coordonnées x, y, z par rapport à λ, μ, ν; ces dix-huit dérivées pourront donc être calculées en fonction des dérivées de L, M, N. Voici les dix-huit formules obtenues en différentiant [9] et [10] :

$$
[19]\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)=0,\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)=0,\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\nu^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)=0;\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)=0,\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)=0,\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\nu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)=0;\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)=0,\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)=0,\\
&\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)=0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
[20]\quad
\left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial\mu}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial\nu}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu},\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M}{\partial\mu}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M}{\partial\nu}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu},\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N}{\partial\lambda}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N}{\partial\mu}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\nu\,\partial\mu}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N}{\partial\nu}=\sum\dfrac{\partial x}{\partial\nu}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\nu^2}.
\end{array}
\right.
$$

On peut remplacer le système [19] par un autre beaucoup plus avantageux : d'abord multiplions la première par 1, la

cinquième par 1, la dernière par — 1 et ajoutons, nous aurons, après avoir supprimé le facteur 2,

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu} = 0;$$

ainsi l'on a déjà le groupe suivant :

$$[21] \quad \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\nu}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 0.$$

Ces formules démontrent un théorème important dû à Dupin, et sur lequel nous aurons à revenir; si, en effet, on joint à la première de ces équations les suivantes, tirées du groupe [9],

$$\sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\nu} = 0,$$

on a, en éliminant $\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial\lambda}$,

$$[22] \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu} & \frac{\partial^2 y}{\partial\mu\,\partial\nu} & \frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial\nu} \\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu} \\ \frac{\partial x}{\partial\nu} & \frac{\partial y}{\partial\nu} & \frac{\partial z}{\partial\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que les lignes $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ coordonnées sur la surface $\lambda = \text{const.}$ sont conjuguées; comme elles sont rectangulaires, il s'ensuit qu'elles sont lignes de courbure; donc :

Lorsque trois familles de surfaces se coupent orthogonalement, elles ont pour intersections leurs lignes de courbure.

En tenant compte des équations [20], les équations [19]

pourront s'écrire, abstraction faite de celles qui ont fourni le système [21],

$$[23]\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\nu} &= \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\nu}, & -\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial\mu} &= \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\nu^2}\frac{\partial x}{\partial\mu},\\ -\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial\lambda} &= \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\nu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}, & -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\nu} &= \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\nu},\\ -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} &= \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu}; & -\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} &= \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on considère les formules [20], [21], [23], on les résoudra facilement par rapport aux dérivées secondes de x, y, z en les groupant, trois par trois, de manière que, dans chaque groupe, il n'entre que des dérivées avec un même dénominateur; on a alors, en tenant compte des relations [11] et [12], pour simplifier les déterminants fonctionnels,

$$[24]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial L}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} - \frac{1}{N}\frac{\partial L}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right),\\ \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial L}{\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\mu} - \frac{1}{N}\frac{\partial L}{\partial\nu}\frac{\partial y}{\partial\nu}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} - \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\nu} - \frac{1}{L}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

$$[25]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right),\\ \frac{\partial^2 x}{\partial\nu\,\partial\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\nu} + \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{\partial^2 y}{\partial\mu\,\partial\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\nu}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\nu}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En différentiant ces formules [24] et [25], on introduirait les dérivées secondes de L, M, N, et l'on pourrait encore calculer les dérivées troisièmes de x, y, z, en fonction des dérivées premières et des dérivées premières et secondes de L, M, N.

V. — Interprétation de L, M, N et de leurs dérivées.

La distance de deux points infiniment voisins, ou la longueur ds d'un arc élémentaire en coordonnées curvilignes, est donnée par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2) = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu} d\nu\right)^2 + \ldots$$

ou, en vertu de [1],

$$ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2 + \mathrm{M}\, d\mu^2 + \mathrm{N}\, d\nu^2 + 2\mathrm{P}\, d\mu\, d\nu + 2\mathrm{Q}\, d\lambda\, d\nu + 2\mathrm{R}\, d\lambda\, d\mu;$$

avec des coordonnées orthogonales, on a seulement

$$ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2 + \mathrm{M}\, d\mu^2 + \mathrm{N}\, d\nu^2.$$

Si, dans ces formules, on fait $d\mu = 0$, $d\nu = 0$ ou $\mu =$ const., $\nu =$ const., on a

$$ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2, \qquad ds = \sqrt{\mathrm{L}}\, d\lambda:$$

donc $\sqrt{\mathrm{L}}\, d\lambda$ représente l'arc de courbe $\mu =$ const., $\nu =$ const. ou, si l'on veut, $\sqrt{\mathrm{L}}$ est le rapport de la distance de deux surfaces $\lambda =$ const. infiniment voisines, les coordonnées étant censées orthogonales.

Dans la théorie des courbes tracées sur une surface, nous avons été obligés d'introduire trois déterminants que l'on exprime facilement à l'aide des coordonnées curvilignes dans l'espace, je veux parler des quantités l, m, r.

Nous supposerons les coordonnées orthogonales, et nous poserons

$$l_\nu = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix},$$

ou bien

$$l_\nu = \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\lambda,\mu)} + \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}\frac{\partial(z,x)}{\partial(\lambda,\mu)} + \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda^2}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)},$$

c'est-à-dire, en vertu de [11],

$$l_\nu = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\nu}\sqrt{\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{N}}}$$

et, en vertu de [23],

[26] $$l_\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{N}}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\nu};$$

on aurait de même

$$m_\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{N}}}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\nu}.$$

L'équation (9), qui fait connaître le rayon de courbure de la section normale correspondant à la direction $d\lambda$, $d\mu$, devient alors, en observant que $r=0$, $\mathrm{R}=0$,

$$\frac{\sqrt{\mathrm{LM}}}{\rho} = -\frac{\sqrt{\mathrm{LM}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\nu}d\lambda^2 + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\nu}d\mu^2\right)}{2(\mathrm{L}\,d\lambda^2 + \mathrm{M}\,d\mu^2)\sqrt{\mathrm{N}}}.$$

Soit $\rho_{\nu\lambda}$ le rayon de courbure principal de la surface $\nu=$ const. correspondant à la ligne de courbure $\nu=$ const., $\lambda=$ const., etc. Cette formule donnera, en faisant successivement $d\mu=0$ et $d\lambda=0$,

[27] $$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\nu\lambda}} &= -\frac{1}{2\mathrm{M}\sqrt{\mathrm{N}}}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\nu}, & \frac{1}{\rho_{\nu\mu}} &= -\frac{1}{2\mathrm{L}\sqrt{\mathrm{N}}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\nu},\\ \frac{1}{\rho_{\lambda\mu}} &= -\frac{1}{2\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{L}}}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\lambda}, & \frac{1}{\rho_{\lambda\nu}} &= -\frac{1}{2\mathrm{M}\sqrt{\mathrm{L}}}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda},\\ \frac{1}{\rho_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2\mathrm{L}\sqrt{\mathrm{M}}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\mu}; & \frac{1}{\rho_{\mu\lambda}} &= -\frac{1}{2\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{M}}}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\mu}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire l'interprétation des dérivées de L, M, N.

Pour obtenir le rayon de courbure d'une ligne de courbure, on peut appliquer le théorème de Hachette (p. 459, t. II), en

vertu duquel la courbure d'une courbe tracée sur deux surfaces $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ est la résultante des courbures des intersections de $\mu = \text{const.}$ par le plan tangent à $\nu = \text{const.}$, et de $\nu = \text{const.}$ par le plan tangent à $\mu = \text{const.}$ Ici les deux plans tangents sont normaux, et, le rayon de courbure de $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ étant désigné par $R_{\mu\nu}$, on a

$$\frac{1}{R_{\mu\nu}^2} = \frac{1}{\rho_{\mu\nu}^2} + \frac{1}{\rho_{\nu\mu}^2}$$

ou

$$[28] \qquad \frac{1}{R_{\mu\nu}^2} = \frac{1}{4L^2}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{M}\left(\frac{\partial L}{\partial \mu}\right)^2\right].$$

D'après Lamé, $\frac{1}{\rho_{\nu\lambda}}$ et $\frac{1}{\rho_{\nu\mu}}$ sont des courbures dites *conjuguées en surface;* au contraire, $\frac{1}{\rho_{\lambda\nu}}$ et $\frac{1}{\rho_{\mu\nu}}$ sont dites *conjuguées en arc.*

Lamé a donné aux dérivées

$$-\frac{1}{2L^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial L}{\partial \lambda}, \quad -\frac{1}{2M^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial M}{\partial \mu}, \quad -\frac{1}{2N^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial N}{\partial \nu}$$

le nom de *courbures paramétriques;* elles sont égales à

$$-\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{L}}}{\partial \lambda}, \quad -\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{M}}}{\partial \mu}, \quad -\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{N}}}{\partial \nu}$$

respectivement.

VI. — Théorème de Dupin.

Arrêtons-nous un instant sur le théorème de Dupin, que nous avons rencontré accidentellement dans l'étude des formules de transformation, et résumons la démonstration de ce théorème. Trois surfaces étant orthogonales, on a

$$(\alpha) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \nu} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0;$$

différentiant ces équations respectivement par rapport à λ, μ, ν, on a

$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)=0,$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)=0,$$
$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)=0;$$

ajoutant les deux premières et retranchant la dernière, on a

$$\sum\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}=0.$$

En éliminant $\frac{\partial x}{\partial\nu}$, $\frac{\partial y}{\partial\nu}$, $\frac{\partial z}{\partial\nu}$ entre cette équation et les deux premières équations (α), on a

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}\\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial\mu}\end{vmatrix}=0,$$

ce qui exprime que les lignes $\lambda=\text{const.}$, $\mu=\text{const.}$ sont conjuguées sur la surface $\nu=\text{const.}$; comme elles sont rectangulaires, elles sont lignes de courbure, d'où le théorème suivant :

Théorème. — *Trois familles de surfaces, se coupant partout orthogonalement, se coupent nécessairement suivant leurs lignes de courbure.* (Dupin, *Développement et applications de Géométrie, Démonstration géométrique.*)

Parmi les nombreuses applications dont est susceptible le théorème de Dupin, signalons la suivante :

Tout système de surfaces orthogonales, transformé par rayons vecteurs réciproques, reste orthogonal après la transformation, et, par suite, les lignes de courbure des familles

considérées ont pour transformées les lignes de courbure des familles transformées.

Supposons que l'on connaisse les lignes de courbure d'une surface S : cette surface fait partie d'un système orthogonal, à savoir les surfaces qui lui sont parallèles et ses normalies développables ; si l'on transforme ce système par rayons vecteurs réciproques, on voit, d'après ce qui précède, que les lignes de courbure de la transformée de S seront les transformées des lignes de courbure de cette surface S.

On connaîtra, par exemple, par ce procédé, les lignes de courbure des transformées des surfaces de révolution, des surfaces développables, etc., et des surfaces du second degré ; mais nous reviendrons sur les lignes de courbure de ces dernières surfaces et sur celles de leurs transformées.

VII. — Conditions pour que deux familles de surfaces fassent partie d'un système orthogonal.

Soient $\lambda =$ const., $\mu =$ const. deux familles de surfaces : pour qu'elles fassent partie d'un système orthogonal, il faut d'abord que

$$(\alpha) \qquad \sum \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0;$$

il faut ensuite, d'après le théorème de Dupin, que leurs intersections soient des lignes de courbure de chacune d'elles. Je dis que, réciproquement, si ces conditions sont remplies, il existera une troisième famille

$$\nu = \text{const.},$$

complétant le système orthogonal.

En effet, si cette troisième famille existe, on aura

$$\sum \frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0, \qquad \sum \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0;$$

voilà deux équations aux dérivées partielles auxquelles doit

satisfaire la fonction ν. Les conditions d'intégrabilité de ces équations se réduisent à (t. VI, p. 114)

$$\sum\left[\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial y}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial y}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x}\right]=0:$$

cette équation peut s'écrire

$$(\beta)\quad\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum\left[\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\right.\\ \displaystyle\quad\left.-\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial\nu}{\partial x}=0.\end{array}\right.$$

Or on a, en différentiant (α),

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\ldots=0;$$

si l'on remplace ensuite, comme cela doit se faire, $\frac{\partial\nu}{\partial x}, \frac{\partial\nu}{\partial y}, \frac{\partial\nu}{\partial z}$ par leurs valeurs tirées des équations à intégrer ou, ce qui revient au même, si l'on remplace $\frac{\partial\nu}{\partial x}, \frac{\partial\nu}{\partial y}, \frac{\partial\nu}{\partial z}$ par les valeurs proportionnelles $\frac{\partial(\mu,\lambda)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(\mu,\lambda)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(\mu,\lambda)}{\partial(x,y)}$, on a la condition d'intégrabilité sous la forme

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} & \ldots\\[2ex] \dfrac{\partial\mu}{\partial x} & \ldots\\[2ex] \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}+\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}+\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} & \ldots\end{vmatrix}=0.$$

Or $\frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\mu}{\partial y}, \frac{\partial\mu}{\partial z}$ sont proportionnels aux composantes d'un déplacement normal à la surface $\mu=$ const. effectué, par conséquent, sur la surface $\lambda=$ const.; en remplaçant donc

$\frac{d\mu}{dx}, \frac{d\mu}{dy}, \frac{d\mu}{dz}$ par dx, dy, dz, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} & \frac{\partial\lambda}{\partial y} & \frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ dx & dy & dz \\ d\frac{\partial\lambda}{\partial x} & d\frac{\partial\lambda}{\partial y} & d\frac{\partial\lambda}{\partial z} \end{vmatrix} = 0:$$

c'est l'équation aux lignes de courbure (p. 15) de la surface $\lambda =$ const. La courbe normale à l'intersection des deux surfaces $\lambda =$ const., $\mu =$ const. doit donc être aussi une ligne de courbure des deux surfaces $\lambda =$ const., $\mu =$ const. pour que la surface $\nu =$ const. orthogonale existe. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que deux familles de surfaces orthogonales fassent partie d'un système triple de surfaces orthogonales, il faut et il suffit que les surfaces données se coupent suivant leurs lignes de courbure.*

Remarquons, en passant, que le théorème précédent contient implicitement le théorème de Dupin, ce qui constitue une seconde démonstration de ce théorème important.

Lorsque l'on connaît deux systèmes de surfaces se coupant suivant leurs lignes de courbure, il est bien facile d'en déduire la troisième famille constituant avec ceux-ci un système triple orthogonal. Le calcul se ramène à l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires, c'est-à-dire en définitive à l'intégration d'une équation aux différentielles totales à trois variables, opération qui n'exige que l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Il est malheureusement fort difficile de trouver des surfaces se coupant suivant une ligne de courbure de chacune d'elles.

VIII. — Conditions pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système orthogonal. — Théorème de M. O. Bonnet.

La recherche d'un sytème de coordonnées orthogonales est une chose en général très difficile; il y a plus, étant donnée une famille de surfaces $\nu =$ const., il n'est pas toujours possible de la comprendre dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

En effet, si elle pouvait faire partie d'un tel système, elle serait rencontrée par les deux autres familles suivant ses lignes de courbure. Soient

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

les équations d'une de ces lignes; elles devront être normales au déplacement δx, δy, δz effectué sur une autre surface du système orthogonal, $\mu =$ const., on devra donc avoir

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0$$

ou, en vertu de (α),

$$(\beta) \qquad u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z = 0.$$

Cette équation ne saurait avoir lieu que s'il existe une certaine condition d'intégrabilité entre u, v, w; ainsi elle ne déterminera pas généralement z en fonction de x, y; en d'autres termes, la surface $\mu =$ const., déterminée par la condition d'être normale au faisceau des lignes de courbure des surfaces $\nu =$ const., n'existera pas toujours.

La condition d'intégrabilité de la formule (β), ou la condition d'existence de la surface $\mu =$ const., est

$$(\gamma) \qquad u\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Maintenant je dis que, si cette équation est satisfaite, la troisième surface $\lambda =$ const. existera ; et que, si

$$\frac{dx}{u'} = \frac{dy}{v'} = \frac{dz}{w'}$$

désignent les équations de la seconde ligne de courbure, l'équation

$$u'\delta x + v'\delta y + w'\delta z = 0$$

sera également intégrable ; et, en effet, deux surfaces μ, ν orthogonales existant et se coupant suivant une ligne de courbure de $\nu =$ const., cette ligne sera ligne de courbure de $\mu =$ const., et la troisième surface se trouvera en appliquant la méthode développée au paragraphe précédent.

Ainsi donc, et c'est en cela que consiste le théorème de M. O. Bonnet (donné en 1862) :

Théorème. — *Pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système orthogonal, il faut et il suffit qu'il existe une relation* (γ) *entre les coefficients des équations des lignes de courbure. Cette relation est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire le premier membre* ν *de l'équation* $\nu =$ const. *de la famille donnée.*

IX. — Théorèmes de M. Maurice Lévy.

Théorème I. — *Soit* M *un point d'une surface* S *appartenant à une famille donnée; soient* MT_1 *et* MT_2 *les tangentes aux lignes de courbure de cette surface passant en* M. *Soit* M' *le point où la normale* MT *rencontre la surface* S' *de la famille considérée, infiniment voisine de* S; *soient* $M'T'_1$ *et* $M'T'_2$ *les tangentes aux lignes de courbure de* S' *passant en* M' : *la condition nécessaire et suffisante pour que la famille considérée fasse partie d'un système orthogonal est que les tangentes* MT_1 *et* $M'T'_1$ *se*

rencontrent quand on néglige les infiniment petits du second ordre; si d'ailleurs cette condition est remplie, MT_2 *et* $M'T'_2$ *se rencontreront également.*

Si le système orthogonal existe, il est bien clair que MT_1 et $M'T'_1$ se rencontreront, ainsi que MT_2 et $M'T'_2$; car la ligne MM' sera une ligne de courbure commune aux surfaces normales à S, en vertu du théorème de Dupin; les normales à l'une des surfaces orthogonales à S, MT_1 et $M'T'_1$, le long de la ligne de courbure MM', devront donc se rencontrer en négligeant les infiniment petits du second ordre. Je dis maintenant que, si les seules lignes $M'T'_1$ et MT_1 se rencontrent, le système orthogonal existera.

En effet, considérons la trajectoire orthogonale de notre famille de surfaces et supposons que l'une des lignes de courbure $\mu =$ const. se déplace en s'appuyant sur la trajectoire : elle engendrera une surface, dont l'équation pourra être représentée par $\mu =$ const.; nous allons prouver que sur cette surface les directions $\nu =$ const. et $\lambda =$ const. sont conjuguées, cette dernière étant celle de la trajectoire MT, si cette trajectoire est orthogonale; $\lambda =$ const., $\nu =$ const. seront des lignes de courbure de $\mu =$ const.

Or l'équation de la tangente à $\mu =$ const., $\nu =$ const. est

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial \lambda}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial \lambda}},$$

et, pour que cette droite rencontre la tangente à $\mu =$ const., $\nu + d\nu =$ const., il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \nu} & \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda\, \partial \nu} & \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda\, \partial \nu} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que les lignes $\lambda = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ sur la surface $\mu = \text{const.}$ soient conjuguées, ou lignes de courbure, puisqu'elles sont orthogonales.

Les deux surfaces $\lambda = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ étant orthogonales et se coupant suivant une ligne de courbure de chacune d'elles, il existera, comme on l'a vu, une surface $\mu = \text{const.}$ complétant le système orthogonal. C. Q. F. D.

(Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1870, comment M. Cayley a profité du théorème de M. Lévy pour écrire l'équation du troisième ordre de M. O. Bonnet.)

THÉORÈME II. — *Pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système orthogonal, il faut que le lieu des ombilics des surfaces individuelles dont elle se compose soit une courbe normale à ces surfaces.*

Ce théorème est presque évident; néanmoins, son utilité est très grande dans la recherche des surfaces orthogonales, puisqu'il permet de rejeter immédiatement une foule de familles, comme ne faisant pas partie d'un système orthogonal.

Pour le démontrer, on observe que,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

désignant les équations des lignes de courbure d'une surface $\nu = \text{const.}$, pour que, en faisant varier la constante à laquelle on égale ν, on obtienne une famille appartenant à un système orthogonal, il faut et il suffit que l'équation

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0$$

soit intégrable. Supposons-la intégrable : ses solutions sont les équations de surfaces orthogonales à $\nu = \text{const.}$; ces équations sont satisfaites pour $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; donc elles contiennent les ombilics de $v = \text{const.}$ Les surfaces ortho-

gonales de $\nu =$ const., passant par les ombilics de celle-ci, se coupent suivant le lieu des ombilics de $\nu =$ const.; ce lieu est donc normal à $\nu =$ const.

C'est dans le XLIII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* que M. Lévy a donné ces théorèmes.

X. — Formules de Lamé.

Dans un système orthogonal, L, M, N ne sont pas arbitraires; il y a lieu de rechercher les relations qui lient entre elles ces quantités. Si l'on différentie l'équation

$$L = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu},$$

on trouve

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \, \partial \nu} = \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^3 x}{\partial \lambda \, \partial \mu \, \partial \nu} + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \nu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu};$$

mais la formule [21]

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial \mu \, \partial \nu} = 0,$$

différentiée par rapport à λ, donne

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial \mu \, \partial \nu} + \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^3 x}{\partial \lambda \, \partial \mu \, \partial \nu} = 0.$$

Cette équation comparée à (α) donne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \, \partial \nu} = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \nu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} - \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial \mu \, \partial \nu};$$

faisant alors usage des formules [24] et [25], on a

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \, \partial \nu} = \; & \sum \left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) \\ & - \sum \left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial L}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{1}{N}\frac{\partial L}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right) \\ & \times \left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right) \end{aligned}$$

ou

$$[26]\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial^2 L}{\partial\mu\,\partial\nu} = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L}{\partial\mu}\dfrac{\partial L}{\partial\nu} + \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial L}{\partial\mu}\dfrac{\partial M}{\partial\nu} + \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial L}{\partial\nu}\dfrac{\partial N}{\partial\mu}, \\ 2\dfrac{\partial^2 M}{\partial\nu\,\partial\lambda} = \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\dfrac{\partial M}{\partial\nu} + \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial M}{\partial\nu}\dfrac{\partial N}{\partial\lambda} + \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial\nu}, \\ 2\dfrac{\partial^2 N}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial N}{\partial\mu}\dfrac{\partial N}{\partial\lambda} + \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial N}{\partial\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial\mu} + \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial\mu}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}. \end{cases}$$

Maintenant différentions les formules

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\mu} = \sum\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial\lambda} = -\sum\frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2},$$

extraites des tableaux [20] et [23]; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} &= \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 + \sum\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial^3 x}{\partial\lambda\,\partial\mu^2}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2} &= -\sum\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} - \sum\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial^3 x}{\partial\lambda\,\partial\mu^2}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\right] = \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)^2 - \sum\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$$

ou, en vertu de [24] et [25],

$$\begin{aligned} 2\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\right] = {} & \sum\left[\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right]^2 \\ & -\sum\left[\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial L}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} - \frac{1}{N}\frac{\partial L}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\nu}\right] \\ & \times\left[\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} - \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\nu} - \frac{1}{L}\frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[27]\quad \begin{cases} 2\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} + \dfrac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\right] = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\mu}\right)^2 + \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\right)^2 \\ \qquad + \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}\dfrac{\partial M}{\partial\lambda} + \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial L}{\partial\mu}\dfrac{\partial M}{\partial\mu} - \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial L}{\partial\nu}\dfrac{\partial M}{\partial\nu}. \end{cases}$$

On peut transformer les relations [26] et [27] comme il suit : on a

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu} = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial\mu}, \qquad \frac{\partial L}{\partial\mu} = 2\sqrt{L}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu};$$

donc

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\mu\,\partial\nu} = 2\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\nu} + 2\sqrt{L}\,\frac{\partial^2\sqrt{L}}{\partial\mu\,\partial\nu}.$$

La première formule [26] devient alors

$$[28] \qquad \frac{\partial^2\sqrt{L}}{\partial\mu\,\partial\nu} = \frac{1}{\sqrt{M}}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\nu} + \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\nu}\,\frac{\partial\sqrt{N}}{\partial\mu};$$

on a ensuite

$$\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu} = \frac{1}{2\sqrt{L}}\,\frac{\partial L}{\partial\mu}, \qquad \frac{\partial L}{\partial\mu} = 2\sqrt{L}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2} = 2\sqrt{L}\,\frac{\partial^2\sqrt{L}}{\partial\mu^2} + 2\left(\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}\right)^2;$$

[27] devient alors

$$\sqrt{L}\,\frac{\partial^2\sqrt{L}}{\partial\mu^2} + \sqrt{M}\,\frac{\partial^2\sqrt{M}}{\partial\lambda^2} = \sqrt{LM}\left[\frac{1}{L}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\lambda} + \frac{1}{M}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\mu} - \frac{1}{N}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\nu}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\nu}\right];$$

en divisant par $\sqrt{LM}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\,\frac{\partial^2\sqrt{L}}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\sqrt{L}}\,\frac{\partial^2\sqrt{M}}{\partial\lambda^2} - \frac{1}{L}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\lambda} - \frac{1}{M}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\mu} = -\frac{1}{N}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\nu}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\nu},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$[29] \quad \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\lambda}\right) = -\frac{1}{N}\,\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\nu}\,\frac{\partial\sqrt{M}}{\partial\nu}.$$

Les formules [28] et [29] sont les formules de Lamé, à cette différence près, que Lamé pose $\lambda = \rho$, $\mu = \rho_1$, $\nu = \rho_2$, $L = H^2$, $M = H_1^2$, $N = H_2^2$. Nous n'avons pas adopté les notations de Lamé, parce que nous voulions conserver dans ce Chapitre les mêmes notations que dans le précédent.

XI. — Recherche des systèmes orthogonaux.

Deux manières de trouver les systèmes de surfaces orthogonales se présentent immédiatement à l'esprit : c'est d'intégrer l'un ou l'autre système d'équations aux dérivées partielles

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \nu} = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \qquad \sum \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \qquad \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0;$$

comme les efforts des géomètres sont restés impuissants, on a cherché à faire dépendre la solution d'équations linéaires. Voici comment Lamé a résolu la question.

Il est parti des formules [28] et [29]; posons

$$(m) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{\sqrt{M}} \dfrac{\partial \sqrt{L}}{\partial \mu} = a', & \dfrac{1}{\sqrt{N}} \dfrac{\partial \sqrt{M}}{\partial \nu} = b'', & \dfrac{1}{\sqrt{L}} \dfrac{\partial \sqrt{N}}{\partial \lambda} = c, \\ \dfrac{1}{\sqrt{N}} \dfrac{\partial \sqrt{L}}{\partial \nu} = a'', & \dfrac{1}{\sqrt{L}} \dfrac{\partial \sqrt{M}}{\partial \lambda} = b, & \dfrac{1}{\sqrt{M}} \dfrac{\partial \sqrt{N}}{\partial \mu} = c'; \end{array} \right.$$

nous aurons, au lieu de [28], que l'on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial^2 \sqrt{L}}{\partial \mu \, \partial \nu} - \frac{1}{M} \frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \mu} \frac{\partial \sqrt{M}}{\partial \nu} = \frac{1}{\sqrt{NM}} \frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \nu} \frac{\partial \sqrt{N}}{\partial \mu},$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \, \partial \nu} - \frac{1}{N} \frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \nu} \frac{\partial \sqrt{N}}{\partial \mu} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \mu} \frac{\partial \sqrt{M}}{\partial \nu},$$

les formules suivantes

$$[30] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial a'}{\partial \nu} = a'' c', & \dfrac{\partial a''}{\partial \mu} = a' b'', \\ \dfrac{\partial b''}{\partial \lambda} = b a'', & \dfrac{\partial b}{\partial \nu} = b'' c, \\ \dfrac{\partial c}{\partial \mu} = c' b, & \dfrac{\partial c'}{\partial \lambda} = c a'. \end{array} \right.$$

Les formules [29] donnent

$$[31]\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a'}{\partial \mu} + \frac{\partial b}{\partial \lambda} + a''b'' = 0,\\ &\frac{\partial b''}{\partial \nu} + \frac{\partial c'}{\partial \mu} + \quad bc = 0,\\ &\frac{\partial c}{\partial \lambda} + \frac{\partial a''}{\partial \nu} + c'a' = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules sont linéaires par rapport aux dérivées de a', a'', b', b'', c, c', ce qui est peut-être un avantage; si l'on pouvait les intégrer, l'élimination de $\sqrt{M}$ et $\sqrt{N}$, par exemple entre les équations (m), donnerait

$$\frac{\partial^2 \sqrt{L}}{\partial \mu\, \partial \nu} = \frac{1}{a'}\frac{\partial a'}{\partial \nu}\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \mu} + \frac{b''}{a''}\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \nu},$$

et L serait déterminé par une équation linéaire; mais, quand même L, M, N seraient connus, il serait encore difficile de calculer λ, μ, ν en fonction de x, y, z.

XII. — Coordonnées elliptiques. — Lignes de courbure de l'ellipsoïde.

La recherche des systèmes orthogonaux est difficile; le nombre de ces systèmes connus est encore aujourd'hui assez restreint. Après les systèmes de plans, les systèmes de surfaces sphériques, coniques et planes, qui constituent les coordonnées rectilignes rectangulaires et polaires, les systèmes orthogonaux, les plus remarquables sont formés par les surfaces homofocales du second degré, représentées par les équations que nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer plusieurs fois,

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,\\ &\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1,\\ &\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1. \end{aligned}\right.$$

Par chaque point de l'espace, il passe trois surfaces du

système (1), comme on l'a vu et, si λ, μ, ν désignent les paramètres de ces surfaces, ces trois quantités déterminent un point et en sont les *coordonnées elliptiques*.

Le système de coordonnées elliptiques est orthogonal; car les trois surfaces (α), qui passent en un point, s'y coupent, comme on l'a vu, à angle droit et par suite suivant leurs lignes de courbure; donc (t. II, p. 321) :

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sont données par cette équation, d'une part, et, d'autre part, par l'équation générale des surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} = 1$$

ainsi que cela résulte du théorème de Dupin.

Les équations (α), résolues par rapport à x, y, z, donnent, comme on l'a déjà vu,

$$(\beta)\qquad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}}, \\ y = \sqrt{\dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}, \\ z = \sqrt{\dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}. \end{cases}$$

Ces formules servent à passer des coordonnées rectilignes aux coordonnées elliptiques.

XIII. — Calcul de divers éléments des surfaces du système elliptique.

Nous allons calculer tout d'abord les éléments L, M, N : posons

$$(\gamma)\qquad 1 - \frac{x^2}{a^2+\rho} - \frac{y^2}{b^2+\rho} - \frac{z^2}{c^2+\rho} = \frac{f(\rho)}{F(\rho)},$$

$$(\delta)\qquad (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho) = F(\rho);$$

si l'on appelle λ, μ, ν les racines de $f(\rho)=0$, comme la plus haute puissance de ρ dans $f(\rho)$ a pour coefficient 1, on a

$$(\varepsilon)\qquad f(\rho)=(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu).$$

Cela posé, des équations (β), on tire, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{1}{2}\frac{1}{a^2+\lambda},$$

$$L=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]$$

ou

$$L=+\frac{1}{4}\frac{d}{d\lambda}\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right),$$

la dérivée étant prise comme si x^2, y^2, z^2 étaient indépendants de λ. On peut encore écrire

$$L=\frac{1}{4}\left[\frac{d}{d\rho}\frac{f(\rho)}{F(\rho)}\right]_{\rho=\lambda};$$

or on a

$$\frac{d}{d\rho}\frac{f(\rho)}{F(\rho)}=\frac{d}{d\rho}\frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho+a^2)(\rho+b^2)(\rho+c^2)}$$
$$=\frac{f(\rho)}{F(\rho)}\left(\frac{1}{\rho-\lambda}-\frac{1}{\rho+c^2}+\dots\right).$$

Si l'on fait $\rho=\lambda$, on a

$$L=\frac{1}{4}\frac{f'(\lambda)}{F(\lambda)},$$

ou bien

$$(\theta)\qquad \left\{\begin{aligned} L&=\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)},\\ M&=\frac{1}{4}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)},\\ N&=\frac{1}{4}\frac{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{(\nu+a^2)(\nu+b^2)(\nu+c^2)}.\end{aligned}\right.$$

Dans l'ellipsoïde les coordonnées des ombilics sont

$$x=a^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\qquad y=0,\qquad z=c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2};$$

si l'on égale ces valeurs de x, y, z à leurs valeurs (β), on trouve, pour coordonnées elliptiques des ombilics, en faisant $\nu = 0$,

$$\lambda = -b^2, \qquad \mu = -b^2,$$

et, en supposant ν quelconque,

$$\lambda = -(b^2+\nu), \qquad \mu = -(b^2+\nu).$$

Cherchons maintenant les rayons de courbure principaux : en appliquant les formules qui donnent les courbures principales des surfaces orthogonales (p. 191), on trouve

$$\frac{1}{\rho_{\lambda\nu}} = \frac{\sqrt{(\nu+a^2)(\nu+b^2(\nu+c^2)}}{(\mu-\nu)\sqrt{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}},$$

$$\frac{1}{\rho_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{(\nu+a^2)(\nu+b^2)(\nu+c^2)}}{(\lambda-\nu)\sqrt{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}};$$

on en conclut les relations très simples

$$\frac{\rho_{\lambda\nu}}{\rho_{\mu\nu}} = \frac{\mu-\nu}{\lambda-\nu},$$

$$\frac{\rho_{\mu\lambda}}{\rho_{\nu\lambda}} = \frac{\nu-\lambda}{\mu-\lambda},$$

$$\frac{\rho_{\nu\mu}}{\rho_{\lambda\mu}} = \frac{\lambda-\mu}{\nu-\mu},$$

et, par suite,

$$\rho_{\lambda\nu}\rho_{\mu\lambda}\rho_{\lambda\nu} + \rho_{\nu\lambda}\rho_{\lambda\mu}\rho_{\mu\nu} = 0.$$

Les rayons de courbure des lignes de courbure seront donnés par les formules

$$\frac{1}{R^2_{\mu\nu}} = \frac{1}{\rho^2_{\mu\nu}} + \frac{1}{\rho^2_{\nu\mu}}.$$

Les courbures géodésiques des lignes de courbure ont une expression assez simple. Soit $\frac{1}{\gamma_{\mu\nu}}$ la courbure géodésique de

la courbe $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$, on a

$$\frac{1}{\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}{\sqrt{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}\frac{1}{\mu-\lambda},$$

$$\frac{1}{\gamma_{\nu\mu}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}{\sqrt{(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)}}\frac{1}{\nu-\lambda},$$

donc

$$\frac{\gamma_{\nu\mu}}{\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\nu-\lambda}{\mu-\lambda};$$

il en résulte

$$\gamma_{\nu\mu}\gamma_{\lambda\nu}\gamma_{\mu\lambda} = \gamma_{\mu\nu}\gamma_{\nu\lambda}\gamma_{\lambda\mu}.$$

La torsion géodésique des lignes coordonnées est nulle, bien entendu.

XIV. — Discussion des équations des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Il est important de se rendre compte de la forme des lignes de courbure de l'ellipsoïde pour chaque valeur des paramètres λ et μ qui entrent dans leurs équations

$$(\alpha)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2+\lambda}=1,\\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2+\mu}+\dfrac{y^2}{b^2+\mu}+\dfrac{z^2}{c^2+\mu}=1.\end{cases}$$

Éliminons z entre ces équations : nous avons

$$(\lambda)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2+\lambda)}+\dfrac{y^2(b^2-c^2)}{b^2(b^2+\lambda)}=1,\\[2mm] \dfrac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2+\mu)}+\dfrac{y^2(b^2-c^2)}{b^2(b^2+\mu)}=1;\end{cases}$$

nous supposerons $a > b > c$, et nous nous bornerons à considérer la première équation. Nous ne donnerons pas à λ de valeurs positives, parce que les lignes de courbure seraient imaginaires, bien que se projetant suivant des ellipses réelles,

les surfaces (β) étant tout à fait intérieures à l'ellipsoïde (α).

Si l'on donne à λ des valeurs supérieures à $-c^2$, on a toujours des ellipsoïdes pour la surface (β), et les ellipsoïdes sont intérieurs à l'ellipsoïde proposé : ils ne peuvent toujours pas le couper.

Supposons maintenant λ compris entre $-b^2$ et $-c^2$: la surface (β) sera un hyperboloïde à une nappe coupant l'ellipsoïde suivant des courbes se projetant suivant des ellipses (γ); pour $\lambda = -c^2$, on a l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui est une ligne de courbure, et, pour $\lambda = -b^2$, l'axe des x, l'hyperboloïde s'est réduit au plan des zx, la ligne de courbure se réduit alors à l'ellipse principale située dans le plan des xz.

Si l'on fait varier λ de $-b^2$ à $-a^2$, la surface (β) est un hyperboloïde à deux nappes qui coupe l'ellipsoïde suivant des lignes de courbure (γ) se projetant suivant des hyperboles; pour $\lambda = -b^2$, comme nous l'avons fait observer, on a des hyperboles infiniment aplaties se confondant avec l'axe des x; et, pour $\lambda = -a^2$, ces hyperboles se réduisent à l'axe des y.

Il résulte de là que, si l'on fait varier λ de $-c^2$ à $-b^2$ et μ de $-b^2$ à $-a^2$, on peut se procurer tous les points réels de l'ellipsoïde, une fois et une fois seulement.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, on verra facilement que les projections des lignes de courbure sur les autres plans de coordonnées sont encore des coniques.

XV. — Lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde.

Le lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde peut s'obtenir en regardant ce lieu comme l'enveloppe d'une

série de plans normaux principaux. Soient l'ellipsoïde

$$(\alpha)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

et

$$(\beta)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

l'équation d'une surface homofocale. Le plan tangent à cette surface

$$\frac{Xx}{a^2+\lambda}+\frac{Yy}{b^2+\lambda}+\frac{Zz}{c^2+\lambda}=1$$

sera une section principale; ses coordonnées tangentielles sont

$$(\gamma)\qquad \xi=\frac{x}{a^2+\lambda},\qquad \eta=\frac{y}{b^2+\lambda},\qquad \zeta=\frac{z}{c^2+\lambda};$$

l'élimination de x, y, z, λ entre (α), (β), (γ) donnera l'équation tangentielle du lieu. L'équation (β) donne

$$(\delta)\qquad (a^2+\lambda)\xi^2+(b^2+\lambda)\eta^2+(c^2+\lambda)\zeta^2=1;$$

l'équation (α), combinée avec (β), donne

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{y^2}{b^2(b^2+\lambda)}+\frac{z^2}{c^2(c^2+\lambda)}=0$$

ou

$$(\varepsilon)\qquad (a^2+\lambda)\frac{\xi^2}{a^2}+(b^2+\lambda)\frac{\eta^2}{b^2}+(c^2+\lambda)\frac{\zeta^2}{c^2}=0.$$

En éliminant λ entre (δ) et (ε), on a

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)(a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2-1).$$

XVI. — Lignes de courbure de la surface podaire de l'ellipsoïde par rapport au centre.

Lorsque l'on connaît un système de surfaces orthogonales, la transformation par rayons vecteurs réciproques fournit de

nouveaux systèmes orthogonaux et, par suite, de nouvelles surfaces dont on connaît les lignes de courbure.

Si l'on transforme le système de surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

en prenant pour pôle de la transformation l'origine des coordonnées, on a

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{k^2}.$$

Les surfaces contenues dans ce type se coupent orthogonalement et, par suite, suivant leurs lignes de courbure.

Or la podaire de l'ellipsoïde

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$$

a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=(x^2+y^2+z^2)^2;$$

ses lignes de courbure sont donc données par des équations de la forme

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

XVII. — Lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

Pour trouver les lignes géodésiques de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

nous le comprendrons dans un système de coordonnées elliptiques, c'est-à-dire que nous ferons $\nu=0$ dans les formules du paragraphe précédent. Nous chercherons ensuite une solution complète de l'équation aux dérivées partielles

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{L}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{1}{M}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2=2h;$$

cette solution, différentiée par rapport à α et à h, fera connaître les équations finies des lignes géodésiques. Quand on fait $\nu = 0$, les valeurs de L et M sont

$$L = \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \mu)\lambda}{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)},$$

$$M = \frac{1}{4} \frac{(\mu - \lambda)\mu}{(\mu + a^2)(\mu + b^2)(\mu + c^2)};$$

en posant, en général,

$$\frac{\rho}{(\rho + a^2)(\rho + b^2)(\rho + c^2)} = f(\rho),$$

$$L = \frac{1}{4}(\lambda - \mu)f(\lambda), \qquad M = \frac{1}{4}(\mu - \lambda)f(\mu),$$

l'équation (α) devient ainsi

$$\frac{1}{(\lambda - \mu)f(\lambda)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{(\mu - \lambda)f(\mu)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2 = \frac{h}{2}.$$

On peut écrire cette équation comme il suit :

$$\frac{1}{f(\lambda)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 - \frac{1}{f(\mu)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2 = \frac{h}{2}(\lambda + \alpha) - \frac{h}{2}(\mu + \alpha);$$

alors on a la solution complète

$$\theta = \int \sqrt{\frac{h}{2}(\lambda + \alpha)f(\lambda)}\, d\lambda - \int \sqrt{\frac{h}{2}(\mu + \alpha)f(\mu)}\, d\mu;$$

en appelant β une nouvelle constante, les équations des lignes géodésiques seront

$$(\beta) \qquad \int \sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda + \alpha}}\, d\lambda - \int \sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu + \alpha}}\, d\mu = \beta,$$

$$(\gamma) \qquad \int \sqrt{(\lambda + \alpha)f(\lambda)}\, d\lambda - \int \sqrt{(\mu + \alpha)f(\mu)}\, d\mu = 2s\sqrt{2h} + c.$$

Dans ces formules il y a quatre constantes α, β, h et c : une de ces constantes est de trop ; cela tient à ce que nous avons considéré deux équations différentielles de nos lignes géodésiques, alors que l'équation finie de la surface était une

équation finie de nos lignes. Nous allons en effet déterminer h. Pour cela, observons que

$$(\delta)\quad ds^2 = \mathrm{L}\,d\lambda^2 + \mathrm{M}\,d\mu^2 = \tfrac{1}{4}[(\lambda-\mu)f(\lambda)d\lambda^2 + (\mu-\lambda)f(\mu)d\mu^2].$$

Or de (β) on tire

$$\frac{d\lambda^2 f(\lambda)}{\lambda+\alpha} = \frac{d\mu^2 f(\mu)}{\mu+\alpha};$$

d'où

$$\frac{d\lambda^2 f(\lambda) - d\mu^2 f(\mu)}{\lambda-\mu} = \frac{d\lambda^2 f(\lambda)(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)^2} = \frac{d\mu^2 f(\mu)(\mu+\alpha)}{(\mu+\alpha)^2}$$

ou encore, en vertu de (δ),

$$\frac{4\,ds^2}{(\lambda-\mu)^2} = \frac{d\lambda^2 f(\lambda)(\lambda+\alpha) + d\mu^2 f(\mu)(\mu+\alpha) - 2\,d\lambda\,d\mu\sqrt{f(\lambda)f(\mu)(\lambda+\alpha)(\mu+\alpha)}}{(\lambda+\alpha)^2 + (\mu+\alpha)^2 - 2(\lambda+\alpha)(\mu+\alpha)},$$

ou, remarquant que les dénominateurs sont égaux et extrayant les racines des numérateurs,

$$2\,ds = d\lambda\sqrt{f(\lambda)(\lambda+\alpha)} - d\mu\sqrt{f(\mu)(\mu+\alpha)};$$

comparant cette formule avec (γ), on voit que l'on doit faire $\sqrt{2h} = 1$.

Nous avons vu que les coordonnées elliptiques des ombilics sont $\lambda = -b^2$, $\mu = -b^2$.

La longueur d'une ligne géodésique comptée à partir d'un ombilic sera donc

$$2s = \int_{-b^2}^{\lambda} \sqrt{f(\lambda)(\lambda+\alpha)}\,d\lambda - \int_{-b^2}^{\mu} \sqrt{f(\mu)(\mu+\alpha)}\,d\mu;$$

cette expression de $2s$ est susceptible de quatre valeurs en changeant les signes des radicaux; ces valeurs correspondent aux quatre ombilics. Prenons deux d'entre elles, la précédente et

$$2s' = \int_{-b^2}^{\lambda} \sqrt{f(\lambda)(\lambda+\alpha)}\,d\lambda + \int_{-b^2}^{\mu} \sqrt{f(\mu)(\mu+\alpha)}\,d\mu;$$

nous avons, en ajoutant,

$$s + s' = \int_{-b^2}^{\lambda} \sqrt{f(\lambda)(\lambda + \alpha)}\, d\lambda,$$

si l'on suppose $s + s'$ constant, λ sera constant; ainsi :

Théorème. — *Le lieu des points, tels que la somme ou la différence de leurs distances géodésiques aux ombilics soit constante, est une ligne de courbure.*

En d'autres termes :

Les ellipses géodésiques ayant les ombilics pour foyers sont les lignes de courbure.

Les équations des lignes géodésiques peuvent encore affecter une forme remarquable due à Liouville.

Différentions l'équation (β), il viendra

$$\sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda + \alpha}} \frac{d\lambda}{ds} - \sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu + \alpha}} \frac{d\mu}{ds} = 0$$

ou

$$(\theta) \qquad \frac{f(\lambda)}{\lambda + \alpha} \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{f(\mu)}{\mu + \alpha} \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2.$$

or, en appelant i l'angle que $\mu = \text{const.}$ fait avec la géodésique, on a

$$\cos^2 i = \mathrm{L}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{1}{4}(\lambda - \mu) f(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2,$$

$$\sin^2 i = \mathrm{M}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = \frac{1}{4}(\mu - \lambda) f(\mu) \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2;$$

d'où

$$f(\lambda)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{4\cos^2 i}{\lambda - \mu},$$

$$f(\mu)\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = \frac{4\sin^2 i}{\mu - \lambda};$$

la formule (θ) devient alors

$$\frac{4\cos^2 i}{(\lambda - \mu)(\lambda + \alpha)} = \frac{4\sin^2 i}{(\mu - \lambda)(\mu + \alpha)}$$

ou

$$(\eta) \qquad \mu \cos^2 i + \lambda \sin^2 i = \alpha.$$

Telle est la forme sous laquelle Liouville a mis l'équation des lignes géodésiques. Exprimons que l'équation précédente (η) a lieu pour $\mu = -b^2$, $\lambda = -b^2$, c'est-à-dire qu'elle passe par un ombilic; nous aurons

$$-b^2 \cos^2 i'^2 - b^2 \sin^2 i'^2 = \alpha \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -b^2,$$

et alors (η) deviendra

$$\mu \cos^2 i + \lambda \sin^2 i = -b^2;$$

i est le même quand on considère deux ombilics différents ou bien il prend des valeurs supplémentaires; donc :

Théorème II. — *Deux géodésiques, issues de deux ombilics différents, font des angles égaux ou supplémentaires avec les lignes de courbure qui passent par leur point de rencontre;*

Propriété qui rapproche encore les lignes de courbure de l'ellipse et de l'hyperbole.

XVIII. — Coordonnées paraboliques. Lignes de courbure des paraboloïdes.

Les équations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p+\lambda} + \dfrac{y^2}{q+\lambda} = 2z + \lambda, \\ \dfrac{x^2}{p+\mu} + \dfrac{y^2}{q+\mu} = 2z + \mu, \\ \dfrac{x^2}{p+\nu} + \dfrac{y^2}{q+\nu} = 2z + \nu \end{cases}$$

sont celles de trois paraboloïdes homofocaux qui déterminent par leur intersection un point (x, y, z); ce point est aussi déterminé par les paramètres λ, μ, ν qui sont ses coordon-

nées paraboliques ; ces coordonnées sont orthogonales, comme l'on a vu, et les formules de transformation sont

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda+p)(\mu+p)(\nu+p)}{q-p},\\ y^2 &= \frac{(\lambda+q)(\mu+q)(\nu+q)}{p-q},\\ -2z &= p+q+\lambda+\mu+\nu. \end{aligned}\right.$$

Les lignes de courbure des surfaces (α) sont leurs intersections respectives et, en particulier, les lignes de courbure du paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

sont données par cette équation et par la suivante, où ρ est variable

$$\frac{x^2}{p+\rho}+\frac{y^2}{q+\rho}=2z+\rho.$$

Ces équations sont faciles à discuter.

XIX. — Lignes géodésiques du paraboloïde.

Quand on effectue les calculs, on trouve pour les coordonnées paraboliques

$$\mathrm{L}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{(\lambda+p)^2}+\frac{1}{(\lambda+q)^2}\right],$$
$$\mathrm{M}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{(\mu+p)^2}+\frac{1}{(\mu+q)^2}\right],$$
$$\mathrm{N}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{(\nu+p)^2}+\frac{1}{(\nu+q)^2}\right].$$

Si nous supposons $\nu=0$, les équations des lignes géodésiques du paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

seront données par l'intégration de l'équation

$$\frac{1}{L}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{M}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right)^2 = 2h;$$

la connaissance d'une intégrale Θ de cette équation renfermant une constante α fera connaître les équations des lignes géodésiques

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \beta, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial h} = s + \text{const.}$$

Or, L et M ne contenant que λ et que μ, on pourra prendre

$$\Theta = \int \alpha\sqrt{L}\,d\lambda + \int \sqrt{2h-\alpha^2}\sqrt{M}\,d\mu,$$

et l'on aura, pour équations des lignes géodésiques,

$$\int \sqrt{L}\,d\lambda - \frac{\alpha}{\sqrt{2h-\alpha^2}}\int \sqrt{M}\,d\mu = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2h-\alpha^2}}\int \sqrt{M}\,d\mu = s + \text{const.};$$

la seconde fait connaître l'arc de géodésique. Les intégrales qui figurent dans ces formules dépendent seulement, comme on le voit, des fonctions elliptiques.

Nous bornerons là notre étude sur les coordonnées paraboliques, la plupart de ces propriétés pouvant se déduire, par la méthode des limites, des propriétés des coordonnées elliptiques, dont elles ne sont, en définitive, qu'un cas particulier.

XX. — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Nous avons vu que deux figures sont transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, par rapport à un pôle O et relativement à un module k, lorsque, M et M' désignant deux points de ces figures situés en ligne droite avec le point O, on a (t. II, p. 245)

$$OM.OM' = k^2.$$

Soient (x, y, z) un point de l'une des figures, et (x', y', z') le point correspondant de l'autre : on a vu que l'on avait, le pôle étant pris pour origine des coordonnées,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x'k^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ y = \dfrac{y'k^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ z = \dfrac{z'k^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}; \end{cases}$$

on en déduit, du reste, x', y', z' en fonction de x, y, z au moyen de formules analogues.

Soit

$$(2)\qquad U_m + U_{m-1} + U_{m-2} + \ldots + U_0 = 0$$

une équation algébrique, U_i désignant en général un polynôme homogène de degré i en x, y, z. Si dans ces polynômes on remplace x, y, z par leurs valeurs (1) et si l'on supprime ensuite les accents devenus inutiles, cette formule (2) deviendra

$$(2)\qquad k^{2m} U_m + k^{2m-2} U_{m-1} R^2 + \ldots + U_0 R^{2m} = 0,$$

R^2 désignant, pour abréger l'écriture, $x^2 + y^2 + z^2$; cette équation sera, en général, de degré $2m$; toutefois ce degré peut s'abaisser.

Soit p le degré du polynôme U_0, U_1, ... qui a l'indice le moins élevé et qui n'est pas nul; en d'autres termes, soit p le nombre de fois que la surface (1) passe par l'origine. Soit q le nombre de fois que la surface passe par le cercle ombilical; en d'autres termes, soit $q = 1$, si U_m contient R^2 en facteur, soit $q = 2$, si U_m contient R^4 en facteur, et si U_{m-1} contient R^2 en facteur, etc., il est clair que le degré de (2) transformée de (1) par rayons vecteurs réciproques sera

$$m' = 2m - 2q - p;$$

d'ailleurs, en appelant p' et q' les nombres analogues à p et q

pour la seconde surface,

$$p' = m - 2q,$$
$$q' = m - p - q,$$

de sorte que pour qu'une surface conserve son degré après une transformation par rayons vecteurs réciproques, il faut que

$$m = 2m - 2q - p$$

ou que

$$m = 2q + p.$$

Une surface du second degré doit donc avoir un point double, c'est-à-dire être un cône, ou avoir comme ligne à l'infini le cercle ombilical, etc.

A côté de la transformation par rayons vecteurs réciproques vient tout naturellement se placer une autre transformation que nous allons faire connaître.

Nous appellerons, dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, *sphère directrice* la sphère ayant son centre au pôle et dont le rayon est le module k de la transformation.

Soient P un point quelconque de l'espace, x', y', z' ses coordonnées : son plan polaire Π par rapport à la sphère directrice a pour équation

$$\text{(3)} \qquad Xx' + Yy' + Zz' = k^2.$$

Exprimons que ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint deux points (x, y, z) et

$$\frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

correspondants par rayons vecteurs réciproques ; nous aurons à identifier l'équation de ce plan avec

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \left(X - \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 + \ldots,$$

ce qui donne

$$\frac{x'}{2\left(x - \frac{k^2 x}{x^2+y^2+z^2}\right)} = \ldots = \frac{k^2}{x^2+y^2+z^2 - \frac{k^4}{x^2+y^2+z^2}};$$

on en tire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{2k^2 x}{x^2+y^2+z^2+k^2}, \\ y' &= \frac{2k^2 y}{x^2+y^2+z^2+k^2}, \\ z' &= \frac{2k'^2 z}{x^2+y^2+z^2+k^2}; \end{aligned}\right.$$

et, comme l'on voit, le point (x', y', z') est sur la droite qui joint le point (x, y, z) à l'origine et, par suite, son correspondant aussi.

Les formules (4) sont de véritables formules de transformation analogues à celles de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Quand le point (x', y', z') sera donné, il en résultera deux points x que l'on construira facilement. Quand le point x' décrira une surface d'ordre m, en général les points x se trouveront sur une surface d'ordre $2m$. Si l'on appelle première figure une figure décrite par x', y', z', et seconde figure une figure décrite par x, y, z, on pourra dire que :

Si la première figure se compose de deux lignes ou de deux surfaces tangentes, leurs correspondantes dans la seconde figure le seront aussi, etc.

XXI. — Des anallagmatiques de M. Moutard.

M. Moutard a donné le nom d'*anallagmatiques* aux surfaces qui sont à elles-mêmes leurs propres transformées par rayons vecteurs réciproques. Leur degré ne devant donc pas changer par une telle transformation, elles auront nécessairement des singularités qui en faciliteront l'étude.

THÉORÈME DE M. MOUTARD. — *Toute anallagmatique est l'enveloppe d'une sphère orthogonale à la sphère directrice de la transformation par rayons vecteurs réciproques, dont le centre se meut sur une surface fixe appelée déférente.*

En effet, considérons sur une anallagmatique trois points infiniment voisins a, b, c, et leurs trois correspondants par rayons vecteurs réciproques a', b', c'; par a, b, c et a', on peut faire passer une sphère, et, à cause des relations suivantes où o est le pôle,

$$oa \times oa' = ob \times ob' = oc \times oc' = k^2.$$

Les points b' et c' seront sur cette sphère, évidemment orthogonale à la sphère directrice, puisque la longueur de la tangente issue de l'origine à cette sphère $aa'bb'cc'$ est k. Cette sphère à la limite est bitangente en a et a' à l'anallagmatique; donc, etc. C. Q. F. D.

Réciproquement, toute enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une surface fixe et qui reste orthogonale à une sphère fixe est une anallagmatique. Nous allons donner de ce théorème une démonstration qui permettra de trouver l'anallagmatique connaissant la déférente

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{1}$$

L'équation de la sphère mobile est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2, \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = k^2 + R^2$$

ou, si l'on veut,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + k^2 = 0. \tag{2}$$

Son enveloppe s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre cette équation, (1) et

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial \gamma}. \tag{3}$$

1° *On voit que la direction x, y, z du rayon vecteur de*

l'anallagmatique est perpendiculaire au plan tangent $\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}, \frac{\partial f}{\partial \gamma}$ *de la déférente.*

2° Si l'on égale chacun des rapports (3) à $\frac{N}{\rho}$, N^2 désignant, pour abréger, $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)^2$, alors ρ^2 sera égal à $x^2 + y^2 + z^2$, et on aura, en combinant (2) et (3),

$$\rho^2 - \frac{\rho}{N}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial f}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma}\right) + k^2 = 0.$$

On reconnaît donc que ρ a deux valeurs et que le produit de ces valeurs est égal à k^2, ce qui montre bien que :

Le lieu des points x, y, z est une anallagmatique.

3° *Le plan tangent à la déférente est perpendiculaire sur le rayon vecteur de l'anallagmatique au milieu de la corde qui joint deux points correspondants de l'anallagmatique.*

XXII. — Équations des anallagmatiques.

Les propriétés fondamentales que nous venons d'établir contiennent toute la théorie des anallagmatiques. Nous appellerons *seconde déférente* d'une anallagmatique la polaire réciproque de la déférente prise par rapport à la sphère directrice.

Ceci posé, par un point A de la déférente menons un plan tangent; soit M le point de la seconde déférente qui correspond à ce point, m et m' les points correspondants de l'anallagmatique; en appelant x, y, z les coordonnées de l'un des points m, m', et x', y', z' les coordonnées de M, on aura, en refaisant un calcul déjà développé au paragraphe antéprécédent,

$$(1) \qquad x' = \frac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2 + k^2}, \qquad y' = \ldots, \qquad z' = \ldots,$$

en sorte que, si

$$(2) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

est l'équation de la seconde déférente rendue homogène, l'équation de l'anallagmatique sera

$$(3) \qquad f\left(x, y, z, \frac{x^2+y^2+z^2+k^2}{2k^2}\right) = 0.$$

La même transformation (1) permet de trouver les focales des anallagmatiques.

Considérons la développable circonscrite à la seconde déférente et à la sphère directrice; soit

$$(4) \qquad \varphi(x', y', z', t') = 0$$

l'équation de cette développable rendue homogène, je dis que

$$(5) \qquad \varphi\left(x, y, z, \frac{x^2+y^2+z^2+k^2}{2k^2}\right) = 0$$

sera l'équation de la développable qui contient la focale.

En effet, nous passons de l'équation (4) à (5) en appliquant la transformation (1). L'équation (2) et l'équation (4) représentent des surfaces circonscrites : donc les équations (4) et (5) représenteront aussi des surfaces circonscrites; l'équation (4) est la surface polaire d'une courbe et (5) représente encore une enveloppe de sphère, mais dont le cercle reste sur une courbe; ces sphères sont toujours orthogonales à la directrice, mais il est facile de voir que leur rayon est nul, car la déférente, étant le lieu des pôles des plans tangents à la développable (4), se trouve sur la sphère directrice. Mais il est facile de voir qu'une pareille enveloppe est développable et qu'elle a pour équation $p^2 + q^2 + 1 = 0$. Admettons-le, on voit que, étant circonscrite à l'anallagmatique, elle n'est autre chose qu'une développable dont la ligne double sera la focale.

Arrivons à la démonstration du théorème sur lequel nous venons de nous appuyer. *La sphère de rayon nul*

$$(a)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=0,$$

où α, β *sont fonctions de* γ, *enveloppe une développable isotrope* $(p^2+q^2+1=0)$.

En effet, l'enveloppe est représentée par l'équation (a) et

$$(b)\qquad (x-\alpha)\alpha'+(y-\beta)\beta'+(z-\gamma)\gamma'=0.$$

Si l'on différentie (a) par rapport à x et à y en tenant compte de (b), on a

$$(x-\alpha)+(z-\gamma)p=0,$$
$$(y-\beta)+(z-\gamma)q=0,$$

d'où l'on tire, en éliminant α, β, γ,

$$p^2+q^2+1=0;$$

donc, etc. C. Q. F. D.

XXIII. — Anallagmatiques du quatrième degré homofocales.

Notre but n'est pas de faire une histoire complète des anallagmatiques, nous avons seulement l'intention de faire connaître un système de surfaces orthogonales découvert par M. Moutard et qui dérive naturellement des théories que nous venons d'exposer.

On trouvera des anallagmatiques homofocales en cherchant des surfaces du second degré inscrites dans une développable circonscrite à la sphère

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2-k^2=0,$$

et en appliquant à ces surfaces la transformation

$$(2)\qquad x'=\frac{2k^2x}{x^2+y^2+z^2+k^2},\qquad y'=\ldots,\qquad z'=\ldots.$$

C'est ce qui résulte de la théorie exposée au paragraphe précédent; or posons

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz + dt, \\ Y &= a'x + b'y + c'z + d't, \\ Z &= a''x + b''y + c''z + d''t, \\ T &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t; \end{aligned}$$

supposons cette substitution orthogonale, et soit $t = k\sqrt{-1}$; l'équation

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0$$

sera identique avec (1), et même on aura identiquement

$$(3\ bis) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = x^2 + y^2 + z^2 - k^2.$$

Une autre surface du second degré, rapportée au tétraèdre conjugué $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$, pourra être représentée par

$$(4) \qquad \frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} + \frac{Z^2}{\gamma} + \frac{T^2}{\delta} = 0.$$

Les équations tangentielles de (3) et (4) sont

$$l^2 + m^2 + n^2 + p^2 = 0,$$

$$\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma n^2 + \delta p^2 = 0,$$

si bien que l'équation tangentielle d'une surface du second ordre inscrite dans la même développable que celles-ci sera

$$(\lambda - \alpha)l^2 + (\lambda - \beta)m^2 + (\lambda - \gamma)n^2 + (\lambda - \delta)p^2 = 0,$$

et son équation ordinaire sera

$$\frac{X^2}{\lambda - \alpha} + \frac{Y^2}{\lambda - \beta} + \frac{Z^2}{\lambda - \gamma} + \frac{T^2}{\lambda - \delta} = 0,$$

ou plus simplement

$$\sum \frac{X^2}{\lambda - \alpha} = 0,$$

ou encore

$$\sum \frac{(ax + by + cz + dk\sqrt{-1})^2}{\lambda - \alpha} = 0.$$

Faisons maintenant la transformation (2), nous aurons l'équation générale des anallagmatiques du quatrième degré homofocales

$$(5)\qquad \sum \frac{1}{\lambda-\alpha}\left[(ax+by+cz)2k^2+dk\sqrt{-1}(x^2+y^2+z^2+k^2)\right]^2=0;$$

nous poserons

$$S=x^2+y^2+z^2+\frac{2k}{d\sqrt{-1}}(ax+by+cz)+k^2;$$

alors (5) pourra s'écrire

$$(f)\qquad \sum \frac{d^2k^2}{\lambda-\alpha}S^2=0.$$

Mais on peut obtenir une forme beaucoup plus instructive au moyen de l'artifice suivant :

L'équation

$$\frac{\lambda-\alpha}{\mu-\alpha}l^2+\frac{\lambda-\beta}{\mu-\beta}m^2+\frac{\lambda-\gamma}{\mu-\gamma}n^2+\frac{\lambda-\delta}{\mu-\delta}p^2=0$$

représente aussi une surface du deuxième degré inscrite dans une développable circonscrite aux surfaces

$$\sum \frac{l^2}{\mu-\alpha}=0 \quad \text{et} \quad \sum \frac{\alpha l^2}{\mu-\alpha}=0$$

et en particulier à la sphère, que l'on obtient en prenant $\lambda=\mu$. L'équation de ces surfaces en coordonnées ordinaires sera

$$\sum \frac{X^2(\mu-\alpha)}{\lambda-\alpha}=0,$$

ou encore

$$\sum \frac{X^2(\mu-\lambda)}{\lambda-\alpha}-\sum X^2=0,$$

ou enfin

$$(6)\qquad \sum \frac{X^2}{\lambda-\alpha}+\frac{U^2}{\lambda-\mu}=0,$$

en supposant que μ soit une des quantités α, β, γ, δ, μ et en posant

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = U^2.$$

C'est dans la formule (6) que nous faisons la substitution (2); alors, en observant que, si l'on pose

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - k^2,$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2 &= \frac{4k^4(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2+k^2)^2} - k^2 \\ &= \frac{4k^4 S + 4k^6 - k^2(S+2k^2)^2}{(x^2+y^2+z^2+k^2)^2} \\ &= -\frac{k^2 S^2}{(x^2+y^2+z^2+k^2)^2}, \end{aligned}$$

l'équation (6) pourra s'écrire

$$\sum \frac{[(ax+by+cz)2k^2 + d\sqrt{-1}\,k(x^2+y^2+z^2+k^2)]^2}{\lambda - \alpha} + \frac{k^2 S^2}{\lambda - \mu} = 0;$$

or, soit

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2k}{d\sqrt{-1}}(ax+by+cz) + k^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

A, B, C, D seront les puissances de sphères dont nous appellerons les rayons M, N, P, Q. Il est facile de voir que ces sphères sont orthogonales entre elles et à la sphère $S = 0$; en mettant en évidence les quantités A, B, C, D, l'équation (6) s'écrit

$$\frac{\left(\frac{A}{M}\right)^2}{\lambda - \alpha} + \frac{\left(\frac{B}{N}\right)^2}{\lambda - \beta} + \frac{\left(\frac{C}{P}\right)^2}{\lambda - \gamma} + \frac{\left(\frac{D}{Q}\right)^2}{\lambda - \delta} + \frac{\left(\frac{S}{k}\right)^2}{\lambda - \mu} = 0.$$

Telle est la forme sous laquelle on peut mettre les équations des anallagmatiques du quatrième ordre homofocales. Cette équation est du troisième degré en λ, ainsi qu'on l'a vu en la mettant sous la forme (f).

XXIV. — Du système triple formé d'anallagmatiques homofocales.

Nous reprendrons les équations des anallagmatiques homofocales pour démontrer les propriétés de ce système, et surtout pour prouver qu'il constitue un système orthogonal.

Nous écrirons l'équation de ce système ainsi

$$(1) \qquad \sum \frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\lambda - \alpha} = 0.$$

$S_1, S_2, \ldots, S_5$ seront alors les puissances de cinq sphères quelconques orthogonales deux à deux, $R_1, \ldots, R_5$ seront leurs rayons et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ seront cinq constantes.

A chaque valeur de x, y, z, ou de $S_1, S_2, \ldots, S_5$, correspondent trois valeurs de λ : donc en chaque point de l'espace passent trois surfaces (1); il est facile de voir qu'elles s'y coupent à angle droit. Soit, en effet, G le premier membre de (1), H ce qu'il devient pour $\lambda = \mu$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z}$$
$$= \sum \frac{\partial G}{\partial S_i}\frac{\partial H}{\partial S_j}\left(\frac{\partial S_i}{\partial x}\frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial S_i}{\partial y}\frac{\partial S_j}{\partial y} + \frac{\partial S_i}{\partial z}\frac{\partial S_j}{\partial z}\right).$$

Or, on trouve que

$$\frac{\partial S_i}{\partial x}\frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial S_i}{\partial y}\frac{\partial S_j}{\partial y} + \frac{\partial S_i}{\partial z}\frac{\partial S_j}{\partial z} = \begin{cases} 2(S_i + S_i) & \text{si } i \gtrless j \\ 4S_i + 4R_i^2 & \text{si } i = j \end{cases}$$

quand les sphères sont orthogonales, donc

$$\sum \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} = \sum 2\frac{\partial G}{\partial S_i} S_i \sum \frac{\partial H}{\partial S_j}$$
$$+ \sum \frac{\partial H}{\partial S_i} S_i \sum \frac{\partial G}{\partial S_j} + 4\sum R_i^2 \frac{\partial G}{\partial S_i}\frac{\partial H}{\partial S_i}.$$

Or, les fonctions G et H étant homogènes, on a, en les supposant nulles,

$$\sum \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} = 4\sum R^2 \frac{\partial G}{\partial S_i}\frac{\partial H}{\partial S_i}.$$

Le second membre de cette formule est à un facteur près égal à $G - H$; on est donc bien en présence d'un système triple de surfaces orthogonales.

Remarques. — L'équation (1) où λ est donné appartient en définitive à une anallagmatique quelconque du quatrième degré, et l'on peut, sur cette équation, étudier les anallagmatiques du quatrième degré. La sphère directrice est l'une des cinq sphères $S_1 = 0, \ldots, S_5 = 0$; comme rien ne les distingue, on voit, et ce théorème est encore de M. Moutard, que :

Toute anallagmatique du quatrième ordre peut être considérée comme telle, de cinq manières différentes: elle a donc cinq pôles, cinq déférentes, etc.

Si l'on veut les focales des anallagmatiques (1), il faudra choisir λ de manière que l'équation des secondes déférentes soient celle de surfaces développables; il faudra donc prendre $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et l'on aura

$$S_i = 0 \quad \text{avec} \quad \sum \frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\alpha_i - \alpha} = 0,$$

S_i n'entrant plus sous le signe $\sum$. Les focales sont donc des courbes sphériques, situées sur les sphères orthogonales du système.

Il va sans dire que les anallagmatiques du quatrième ordre sont de nouvelles surfaces dont on sait trouver les lignes de courbure.

XXV. — Quelques anallagmatiques remarquables.

La cyclide de Dupin est une anallagmatique (p. 45); c'est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un tore; la déférente se réduit à une simple courbe du second degré.

En effet, la cyclide étant la transformée d'un tore, c'est-

à-dire de l'enveloppe d'une sphère orthogonale à un plan, et tangente à un plan et à une sphère, la cyclide pourra être regardée comme l'enveloppe d'une sphère qui reste orthogonale à une sphère et tangente à deux autres sphères. Ce sera une anallagmatique du quatrième ordre; sa seconde déférente sera une développable.

Parmi les anallagmatiques du quatrième ordre qui sont engendrées par une sphère normale à trois autres, il y en a qui ont trois plans de symétrie; on les obtient en transformant les autres par rayons vecteurs réciproques et en prenant pour pôle de la transformation le point d'intersection des trois sphères directrices.

Disons enfin que, lorsque la déférente d'une anallagmatique est une surface du second degré dénuée de centre, l'anallagmatique est du troisième degré; en effet, la seconde déférente passe alors par l'origine, puisque la première est tangente au plan de l'infini; il est facile de voir qu'alors, dans l'équation transformée par la substitution

$$x' = \frac{2k^2x}{x^2+y^2+z^2+k^2}, \quad \cdots$$

les termes en $(x^2+y^2+z^2+k^2)^2$ manquent.

XXVI. — Application des coordonnées curvilignes à la recherche des surfaces et des volumes.

L'élément de surface en coordonnées curvilignes est le parallélogramme formé par les lignes

$$\lambda = \text{const.}$$

et

$$\lambda + d\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.}, \qquad \mu + d\mu = \text{const.};$$

ce parallélogramme a pour expression

$$ds_\lambda\, ds_\mu \sin\theta,$$

formule où ds_λ, ds_μ sont les arcs élémentaires des lignes coordonnées et θ l'angle compris. Or

$$ds_\lambda = \sqrt{L}\, d\lambda, \qquad ds_\mu = \sqrt{M}\, d\mu, \qquad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{LM}};$$

on a donc

$$ds_\lambda\, ds_\mu \sin\theta = \sqrt{LM - R^2}\, d\lambda\, d\mu;$$

l'aire d'une portion finie de surface comprise entre les lignes $\lambda = \lambda_0$, $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_0$, $\mu = \mu_1$ sera

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \sqrt{LM - R^2}\, d\lambda\, d\mu.$$

Pour évaluer le volume compris entre la surface et le plan des xy, on désignera par α, β, γ les angles que la normale à l'élément $d\omega = \sqrt{LM - R^2}\, d\lambda\, d\mu$ de surface fait avec les axes de coordonnées; il est clair que le volume cherché est une somme d'éléments ayant pour base $d\omega \cos\gamma$ et pour hauteur z; le volume de l'un de ces éléments sera donc $z \cos\gamma\, d\omega$; or, on a

$$\cos\alpha \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \cos\beta \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \cos\gamma \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\cos\alpha \frac{\partial x}{\partial \mu} + \cos\beta \frac{\partial y}{\partial \mu} + \cos\gamma \frac{\partial z}{\partial \mu} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos\gamma = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)} \frac{1}{\sqrt{LM - R^2}}.$$

Notre élément de volume devient alors

$$z\, d\lambda\, d\mu \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)},$$

et le volume total

$$\iint z \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

comme l'indique la théorie du changement de variable dans les intégrales multiples (t. III, p. 151).

Les équations

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=0,$$
$$x^2\quad+y^2\quad+z^2\quad=r^2$$

représentent un système de surfaces orthogonales composé de deux cônes et d'une sphère et dont on peut faire usage pour calculer le volume de la sphère ou sa surface. Les formules auxquelles on est ainsi conduit ne peuvent pas servir à évaluer le volume et la surface en question, mais cette difficulté tourne au profit de l'analyse, car, comme on connaît le volume et la surface en question, on trouve ainsi la valeur de deux intégrales compliquées que l'on n'aurait pas pu estimer facilement par une autre voie.

Les équations précédentes donnent

$$\frac{x^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{(c^2+\lambda)(b^2+\mu)-(b^2+\lambda)(c^2+\mu)}=\dots$$

ou bien

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned}&\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(b^2-c^2)}=\frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2-a^2)}\\&=\frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(a^2-b^2)}=\frac{r^2}{\sum(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(b^2-c^2)}.\end{aligned}\right.$$

Or on a

$$\begin{aligned}&\sum(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(b^2-c^2)\\&\quad=\sum(b^2-c^2)(a^4+a^2\lambda+a^2\mu+\lambda\mu)=\sum(b^2-c^2)a^4,\end{aligned}$$

car

$$\sum(b^2-c^2)a^2=0,\qquad\sum(b^2-c^2)=0.$$

Posant donc

$$H=\sum a^4(b^2-c^2),$$

les équations (α) donneront

$$x^2 = \frac{r^2}{H}(b^2 - c^2)(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu),$$

$$y^2 = \frac{r^2}{H}(c^2 - a^2)(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu),$$

$$z^2 = \frac{r^2}{H}(a^2 - b^2)(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu),$$

$$2\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{a^2 + \lambda}, \qquad 2\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{1}{a^2 + \mu},$$

$$L = \frac{r^2}{4H}\left[\frac{(b^2 - c^2)(a^2 + \mu)}{a^2 + \lambda} + \frac{(c^2 - a^2)(b^2 + \mu)}{b^2 + \lambda} + \frac{(a^2 - b^2)(c^2 + \mu)}{c^2 + \lambda}\right],$$

$$M = \frac{r^2}{4H}\left[\frac{(b^2 - c^2)(a^2 + \lambda)}{(a^2 + \mu)} + \ldots\right].$$

Nous pouvons écrire

$$L = \frac{r^2}{4H}\,\frac{\sum(b^2 + c^2)(a^2 + \mu)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

$$= \frac{r^2}{4H}\,\frac{\sum(b^2 - c^2)(b^2 + c^2)\lambda(\mu + a^2)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

$$= \frac{r^2}{4H}\,\frac{\sum(b^4 - c^4)a^2\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

$$LM = \frac{r^4}{16H^2}\,\frac{\lambda\mu\left[\sum(b^4 - c^4)a^2\right]^2(\mu - \lambda)^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}.$$

On a donc pour la huitième partie de la surface de la sphère ou $\frac{\pi r^2}{2}$

$$\frac{r^2}{2} = \int_{-b^2}^{-a^2}\int_{-c^2}^{-b^2} \frac{r^2}{4H}\,\frac{\lambda\mu\, d\lambda\, d\mu \sum(b^4 - c^4)a^2(\mu - \lambda)}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)}};$$

on peut supposer $a = 0$, on a alors

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-b^2}^{0}\int_{-c^2}^{-b^2} \frac{d\lambda\, d\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}}$$

et, en faisant $\lambda = -u^2$, $\mu = -v^2$,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^b \int_b^c \frac{du\, dv(u^2 - v^2)}{\sqrt{(b^2-u^2)(b^2-v^2)(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}.$$

Cette formule, découverte par Lamé, est remarquable.

EXERCICES ET NOTES.

1. Les systèmes suivants sont orthogonaux :

$$\begin{aligned}
\alpha &= xyz,\\
\beta &= (y^2+z^2-2x^2)(z^2+x^2-2y^2)(x^2+y^2-2z^2)\\
&\quad -2(x^4+y^4+z^4-y^2z^2-x^2z^2-x^2y^2)^{\frac{3}{2}},\\
\gamma &= (y^2+z^2-2x^2)(z^2+x^2-2y^2)(x^2+y^2-2z^2)\\
&\quad +2(x^4+y^4+z^4-y^2z^2-x^2z^2-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

(Cayley.)

$$\alpha z = xy, \qquad \beta = \sqrt{z^2+x^2} + \sqrt{z^2+y^2},$$

$$\gamma = \sqrt{z^2+x^2} - \sqrt{z^2+y^2}. \qquad \text{(J.-A. Serret.)}$$

2.

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)^2 + ax^2 + by^2 + cz^2 + p^2\\
&\quad + \frac{4p^2-a^2}{a+\lambda}x^2 + \frac{4p^2-b^2}{b+\lambda}y^2 + \frac{4p^2-c^2}{c+\lambda}z^2 = 0
\end{aligned}$$

est une équation qui pour un système de valeurs données de x, y, z détermine trois valeurs de λ; chacune de ces trois valeurs détermine une surface, les trois surfaces ainsi obtenues se coupent orthogonalement : le système précédent est donc à la fois triple et un.

(Darboux.)

3. Pour que, X, Y, Z désignant des fonctions de x seul, de y seul, de z seul,

$$X + Y + Z = \text{const.}$$

fasse partie d'un système orthogonal, il faut que

$$\frac{dX}{dx}\frac{d^3X}{dx^3}-\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2=a\frac{d^2X}{dx^2}+b,$$

a et b désignant des constantes, des relations analogues doivent exister entre les dérivées de Y et de Z. (J. A. SERRET.)

4. Si l'on considère l'équation

$$(1)\qquad x^\alpha y^\beta z^\gamma=\text{const.},$$

et si dans l'équation

$$(2)\qquad \left(\lambda+\frac{x^2}{\alpha}\right)^\alpha\left(\lambda+\frac{y^2}{\beta}\right)^\beta\left(\lambda+\frac{z^2}{\gamma}\right)^\gamma=\text{const.},$$

on remplace λ par les deux valeurs tirées de

$$\frac{\alpha}{\lambda+\frac{x^2}{\alpha}}+\frac{\beta}{\lambda+\frac{y^2}{\beta}}+\frac{\gamma}{\lambda+\frac{z^2}{\gamma}}=0,$$

l'équation (2) représentera deux familles de surfaces qui, avec (1), formeront un système orthogonal. (DARBOUX.)

5. Les enveloppes des surfaces suivantes, où l'on fait varier λ,

$$\lambda^\delta\left(\lambda+\frac{x^2}{\alpha}\right)^\alpha\left(\lambda+\frac{y^2}{\beta}\right)^\beta\left(\lambda+\frac{z^2}{\gamma}\right)^\gamma=\text{const.},$$

forment un système triple de surfaces orthogonales.

(DARBOUX.)

6. Les surfaces suivantes forment un système orthogonal

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha x-b^2}+\frac{z^2}{\alpha x-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\beta y+b^2}+\frac{y}{\beta}+\frac{z^2}{\beta y+b^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\gamma z+c^2}+\frac{y^2}{\gamma z+c^2-b^2}+\frac{z}{\gamma}=1.$$

(W. ROBERTS.)

7. On peut quelquefois faire dériver de systèmes orthogonaux d'autres systèmes utiles à considérer : le système

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=0$$

est orthogonal. Le système

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=r^2,$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2(a^2+\lambda)}+\frac{y^2}{\beta^2(b^2-\lambda)}+\frac{z^2}{\gamma^2(c^2+\lambda)}=0,$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2(a^2-\mu)}-\frac{y^2}{\beta^2(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{\gamma^2(c^2+\mu)}=0$$

représente une série d'ellipsoïdes et de cônes qui ne sont plus orthogonaux, mais qui peuvent être pris pour surfaces coordonnées. En faisant usage de ces coordonnées curvilignes pour évaluer le volume de l'ellipsoïde, on est conduit à une intégrale double ou triple que l'on évaluerait difficilement par d'autres voies.

8. Soit s une surface du deuxième ordre, c une de ses lignes de courbure; soit s' une surface du second ordre coupant s suivant la courbe c, la surface développable circonscrite à s et s' touche s suivant une ligne de courbure.

(Laguerre, *Société mathématique de France*, 1876.)

9. Soit $R^2=x^2+y^2+z^2$, les surfaces

$$R^4+ax^2+by^2+cz^2=p^2,$$
$$R^4+a'x^2+b'y^2+c'z^2=p'^2,$$
$$R^4+a''x^2+b''y^2+c''z^2=p''^2$$

sont orthogonales, si l'on a

$$\frac{4p^2+ab}{a-b}=\frac{4p'^2+a'b'}{a'-b'}=\frac{4p''^2+a''b''}{a''-b''},$$

$$\frac{4p^2+ac}{a-c}=\frac{4p'^2+a'c'}{a'-c'}=\frac{4p''^2+a''c''}{a''-c''}.$$

(Wangerin, *Crelle*, t. 82.)

CHAPITRE V.

THÉORIE DES SURFACES GAUCHES.

I. — Préliminaires.

Avant d'aborder l'étude des surfaces gauches, nous rappellerons quelques formules de Géométrie analytique.

Soient

(1) $$X = x + \lambda\alpha, \qquad Y = y + \lambda\beta, \qquad Z = z + \lambda\gamma,$$

(2) $$X = x' + \lambda'\alpha', \qquad Y = y' + \lambda'\beta', \qquad Z = z' + \lambda'\gamma'$$

les équations de deux droites, où α, β, γ, α', β', γ' désignent les cosinus qui servent à définir leur direction et où λ, λ' désignent les distances du point X, Y, Z au point x, y, z ou x', y', z'.

La plus courte distance de ces droites est donnée par la formule

(3) $$\delta = \frac{1}{\sin V}\begin{vmatrix} x - x' & y - y' & z - z' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix},$$

formule où V désigne leur angle; d'ailleurs

(4) $$\sin^2 V = \sum(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2.$$

Les angles que fait la plus courte distance δ avec les axes ont pour cosinus

(5) $$\frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\sin V}, \quad \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\sin V}, \quad \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\sin V}.$$

Les points où la plus courte distance rencontre chacune des droites sont donnés par les formules

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sum(x'-x)(\alpha-\alpha'\cos V)}{\sin^2 V}, \\ X = x + \alpha\,\dfrac{\sum(x'-x)(\alpha-\alpha'\cos V)}{\sin^2 V}, \quad \dots\dots \end{cases}$$

Une *surface gauche,* ou plus généralement une surface *réglée,* est engendrée par le mouvement d'une droite qui porte le nom de *génératrice.* On réserve plus particulièrement le nom de *surfaces gauches* aux surfaces réglées non développables. Ce qui distingue la surface développable des autres surfaces réglées, rappelons-le, c'est que la distance de deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre et que (ce qui est une autre manière d'exprimer la chose) les génératrices sont tangentes à une même courbe.

Nous représenterons une surface gauche par les équations d'une génératrice, à savoir

$$(7)\qquad X = x + \lambda\alpha, \qquad Y = y + \lambda\beta, \qquad Z = z + \lambda\gamma.$$

x, y, z seront, ainsi que α, β, γ, fonctions d'un même paramètre μ, qui sera l'arc de la courbe décrite par le point x, y, z. Nous appellerons cette courbe la *directrice* et le point x, y, z s'appellera le point M. α, β, γ seront les cosinus directeurs de la génératrice, alors λ sera la distance du point $M(x, y, z)$ au point X, Y, Z ou m. Dans ce qui va suivre, μ sera l'arc de directrice et les dérivées relatives à μ seront désignées par des accents.

x', y', z' seront alors les cosinus directeurs de la tangente à la directrice.

La plus courte distance de deux génératrices voisines fait avec les axes des angles dont les cosinus sont, en vertu de (5),

$$\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\varphi'}, \quad \frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\varphi'}, \quad \frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\varphi'},$$

φ' désignant le rapport de l'angle de deux génératrices infiniment voisines $d\varphi$ à l'arc $d\mu$. Il en résulte que la direction α', β', γ' est à la fois perpendiculaire, 1° à la plus courte distance de deux génératrices voisines; 2° à la génératrice, car, $\sum \alpha^2$ étant égal à 1, $\sum \alpha\alpha' = 0$. Cette direction est celle de la normale à un plan passant par la génératrice et la plus courte distance de deux génératrices voisines; ce plan porte le nom de *plan central;* ses cosinus directeurs sont

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{\sum \alpha'^2}}, \quad \frac{\beta'}{\sqrt{\sum \alpha'^2}}, \quad \frac{\gamma'}{\sqrt{\sum \alpha'^2}};$$

or

$$\sum \alpha'^2 = \sum (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 = \varphi'^2;$$

ainsi *les cosinus directeurs du plan central sont* $\frac{\alpha'}{\varphi'}, \frac{\beta'}{\varphi'}, \frac{\gamma'}{\varphi'}$.

Le point à partir duquel se compte la plus courte distance de deux génératrices voisines est appelé *point central,* et le lieu des points centraux est la *ligne de striction* de la surface.

Le point central sera donné par la formule (6), et l'on aura

$$\lambda = \frac{\sum dx\, d\alpha}{d\varphi^2} = \frac{\sum x'\alpha'}{\varphi'^2};$$

donc λ, la distance du point M au point central que nous appellerons O, est égale à $\sum x' \frac{\alpha'}{\varphi'} \frac{1}{\varphi'}$, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{\varphi'}$ multiplié par le sinus de l'angle que la directrice fait avec le plan central; posons donc

$$\lambda = \frac{1}{\varphi'} \sin\omega = \frac{d\mu \sin\omega}{d\varphi}.$$

Si la directrice est normale à la génératrice, ce que l'on est en droit de supposer, ω devient l'angle du plan central avec le plan tangent; d'ailleurs $d\mu = \frac{\delta}{\cos\omega}$, δ désignant la plus

courte distance de deux génératrices voisines; on a donc

$$\lambda = \frac{\delta}{d\varphi} \operatorname{tang}\omega.$$

Le rapport $\frac{\delta}{d\varphi}$ est ce que l'on appelle le *paramètre de distribution;* en le désignant par k, on a la relation remarquable

$$(8) \qquad \lambda = k \operatorname{tang}\omega;$$

d'ailleurs le plan central est évidemment tangent au point central à la surface. La distance δ est donnée par la formule

$$\delta = \frac{1}{d\varphi} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}$$

ou

$$(9) \qquad \frac{\delta}{d\varphi} = \frac{1}{\varphi'^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = k.$$

Nous allons retrouver ces résultats par une autre voie.

Cherchons les coefficients directeurs du plan tangent au point X, Y, Z et posons $p = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$, nous aurons, en différentiant les formules (7),

$$1 = \frac{\partial\mu}{\partial X}(x' + \lambda\alpha') + \alpha\frac{\partial\lambda}{\partial X},$$

$$0 = \frac{\partial\mu}{\partial Y}(x' + \lambda\alpha') + \alpha\frac{\partial\lambda}{\partial Y},$$

$$0 = \frac{\partial\mu}{\partial X}(y' + \lambda\beta') + \beta\frac{\partial\lambda}{\partial X},$$

$$1 = \frac{\partial\mu}{\partial Y}(y' + \lambda\beta') + \beta\frac{\partial\lambda}{\partial Y},$$

$$p = \frac{\partial\mu}{\partial X}(z' + \lambda\gamma') + \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial X},$$

$$q = \frac{\partial\mu}{\partial Y}(z' + \lambda\gamma') + \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial Y};$$

on en tire

$$\begin{vmatrix} 1 & x'+\lambda\alpha' & \alpha \\ 0 & y'+\lambda\beta' & \beta \\ p & z'+\lambda\gamma' & \gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & x'+\lambda\alpha' & \alpha \\ 1 & y'+\lambda\beta' & \beta \\ q & z'+\lambda\gamma' & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

par suite, l'équation du plan tangent au point X, Y, Z devient, en appelant ξ, η, ζ les coordonnées courantes,

$$\begin{aligned} &(\xi - X)[\beta z' - \gamma y' + \lambda(\beta\gamma' - \gamma\beta')] \\ +&(\eta - Y)[\gamma x' - \alpha z' + \lambda(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')] \\ +&(\zeta - Z)[\alpha y' - \beta x' + \lambda(\alpha\beta' - \beta\alpha')] = 0. \end{aligned}$$

Maintenant prenons la génératrice sur laquelle est située le point X, Y, Z pour axe des Z; en d'autres termes, supposons $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$. Supposons en outre que le point x, y, z soit à l'origine et soit précisément le point central, alors $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \lambda$; de plus, prenons pour axe des x la plus courte distance de deux génératrices voisines, alors la direction α', β', γ' sera, comme nous l'avons vu, perpendiculaire à l'axe des z et à l'axe des x; on aura donc $\alpha' = 0$, $\gamma' = 0$. Enfin rien n'empêche de prendre la ligne de striction pour lieu des points x, y, z, en sorte que l'on aura $y' = 0$, $z' = 0$; l'équation du plan tangent deviendra alors

$$-\xi\lambda\beta' + \eta x' = 0;$$

il passera donc par l'axe des z, ce qui était évident *a priori*, et si l'on appelle ω l'angle qu'il fait avec les plans de xz, qui est le plan central, on aura

$$\operatorname{tang}\omega = \lambda\frac{\beta'}{x'} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = k \operatorname{tang}\omega;$$

changeons ω en $\omega + \frac{\pi}{2}$ et appelons λ_1 la nouvelle valeur de λ, on aura

$$\lambda_1 = -\frac{k}{\operatorname{tang}\omega};$$

d'où l'on tire

$$\lambda\lambda_1 = -k^2.$$

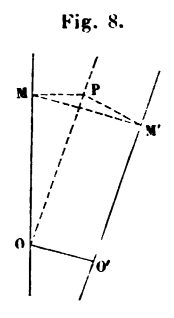
On peut alors énoncer le théorème suivant :

Les points de contact de deux plans rectangulaires, tangents suivant une même génératrice, forment deux divisions en involution et le produit des distances des deux points de contact au point central est constant.

II. — Propriétés du plan tangent.

Soient OM, O'M' deux génératrices voisines, $OO' = \delta$ leur plus courte distance, $OM = \lambda$; par le point O menons OP

Fig. 8.



parallèle à O'M' et par le point M le plan MPM' perpendiculaire à O'M'.

1° *Le plan central est tangent au plan central* O.

En effet, ce plan contient deux tangentes, à savoir : la génératrice OM et la ligne OO'.

2° Le plan passant par OM et MM' est, pour raison analogue, le plan tangent en M; l'angle en M' du triangle MPM' est l'angle ω que fait le plan tangent en M' avec le plan central : on aura, en outre, $M'P = \delta$; donc

$$MP = \delta \operatorname{tang} \omega;$$

or $MP = \lambda\, d\varphi$: donc

$$(1) \qquad \lambda = \frac{\delta}{d\varphi} \operatorname{tang} \omega, \qquad \text{ou} \qquad \lambda = k \operatorname{tang} \omega,$$

ainsi que nous l'avons vu plus haut.

Dans une surface développable, δ est du troisième ordre; $\frac{\delta}{d\varphi}$ est donc nul, le paramètre de distribution est nul et $\omega = \frac{\pi}{2}$; le plan tangent est donc le même tout le long d'une génératrice.

3° La formule (1) montre que le plan tangent varie tout le long d'une génératrice; à l'infini il est perpendiculaire au plan central; il tourne donc de 180° dans tout son parcours et se confond avec le plan central quand il est tangent au point central.

4° *Tout plan passant par une génératrice est tangent quelque part sur cette génératrice en un point donné par la formule* (1).

5° *Il n'est tangent qu'en un seul point sur cette génératrice.*

6° *Lorsque deux surfaces gauches ont une génératrice commune, elles ont deux plans tangents communs.*

Soit, en effet, θ l'angle que fait un plan quelconque passant par la génératrice commune avec un plan fixe passant par cette génératrice; soient x et x' les abscisses des points où il est tangent à l'une et à l'autre surface, comptées à partir d'un point fixe sur la génératrice, on a

$$x = a + k \operatorname{tang}(\theta + \alpha) = a + k \frac{\operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\alpha},$$

$$x' = a' + k' \operatorname{tang}(\theta + \alpha') = a' + k' \frac{\operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}\alpha'}{1 - \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\alpha'};$$

si l'on élimine θ entre les équations, on obtient entre x et x' une relation de la forme

$$xx' + \lambda x + \mu x' + \nu = 0;$$

les points de contact décrivent donc deux divisinos homographiques; les points doubles, au nombre de deux, sont des points pour lesquels les plans tangents aux deux surfaces coïncident.

7° *Deux surfaces gauches qui ont trois plans tangents communs en trois points d'une même génératrice ont toujours le même plan tangent tout le long de cette génératrice.*

En effet, les points de contact d'un même plan dans les deux surfaces forment deux divisions homographiques : les points de contact ne peuvent coïncider qu'aux points doubles; s'il y a plus de deux points doubles, les deux divisions sont coïncidentes et tous leurs points sont doubles : donc, etc.

C. Q. F. D.

III. — Paraboloïde de raccordement.

Théorème. — *Si, par tous les points d'une génératrice d'une surface gauche on mène des normales à la surface, toutes ces normales engendrent un paraboloïde hyperbolique* dit *paraboloïde des normales.*

En effet, prenons la génératrice en question pour axe des z, le point central pour origine, le plan central pour plan des zx et deux autres plans de coordonnées achevant avec celui-ci un système rectangulaire.

Les équations d'une normale seront

$$z = \lambda, \qquad \frac{y}{x} = -\cot\omega,$$

ω désignant l'angle que le plan tangent fait avec le plan central. Or on a, en appelant k le paramètre de distribution,

$$\lambda = k \operatorname{tang}\omega;$$

en éliminant λ, on a

$$z = k \operatorname{tang}\omega, \qquad \frac{y}{x} = -\cot\omega,$$

ou, en faisant le produit,

$$z\frac{y}{x} = -k \qquad \text{ou} \qquad zy = -kx.$$

On reconnaît immédiatement un paraboloïde dont les plans directeurs sont précisément le plan des zx et le plan des zy, c'est-à-dire le plan central et le plan perpendiculaire passant par la génératrice. On voit, de plus, que le point central est le sommet du paraboloïde en question, qui est équilatère.

Si l'on fait tourner de 90° le paraboloïde en question, ses génératrices normales à la surface deviendront tangentes, et dans cette position il sera tangent à la surface tout le long d'une même génératrice; on lui donne alors le nom de *paraboloïde de raccordement.*

Le point central est, comme l'on voit, le sommet du paraboloïde de raccordement.

IV. — Cônes et cylindres circonscrits.

Un cône circonscrit à une surface réglée ayant le même plan tangent que cette surface le long de la courbe de contact, si nous considérons un point M de la courbe de contact, le plan tangent commun en M contiendra la génératrice du cône et celle de la surface.

Pour circonscrire un cône à une surface gauche, le sommet étant donné en s, on fera passer par le sommet s et par chaque génératrice un plan et on cherchera le point de contact de ce plan. C'est alors que la considération du paraboloïde de raccordement deviendra utile, puisque, au lieu de chercher le point de contact sur la surface, il suffira de le chercher sur le paraboloïde, dont les propriétés sont en général beaucoup mieux connues.

Mais considérons les traces des plans tangents menés par le point s sur un plan quelconque; ces traces sont les perspectives des génératrices de la surface; ce sont aussi les tangentes à la base du cylindre circonscrit considérée sur le plan de perspective. Il en résulte que :

Les perspectives des génératrices enveloppent le contour apparent de la surface.

Ce que nous avons dit d'un cône circonscrit est vrai à la limite pour le cylindre circonscrit; donc :

Les projections des génératrices sur un plan quelconque enveloppent le contour apparent de la surface.

V. — Surfaces réglées à plan directeur.

Supposons que, par un point de l'espace ou même des parallèles à toutes les génératrices d'une surface gauche, on formera un cône dit *cône directeur* de la surface. (On obtient très facilement l'équation de ce cône quand la surface est donnée par les équations de ses génératrices.) Ce cône directeur est évidemment le cône des directions asymptotiques de la surface; une surface gauche est en général déterminée par son cône directeur et deux directrices sur lesquelles la génératrice est assujettie à s'appuyer.

Lorsque le cône directeur se réduit à un plan, on dit que la surface est à *plan directeur;* dans ce cas la surface est *gauche,* c'est-à-dire que la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est du premier ordre. Le type de ces surfaces est le paraboloïde, qui possède deux plans directeurs.

Le contour apparent de la surface sur son plan directeur est manifestement la projection de la ligne de striction. En effet, le point où se compte la plus courte distance de deux génératrices voisines se projette sur l'intersection des projections de ces deux génératrices.

VI. — Symptômes auxquels on reconnaît qu'une surface est réglée.

Si une surface est réglée, son cône directeur a ses génératrices parallèles à celles de la surface; or ce cône directeur est le cône des directions asymptotiques; son équation est donc facile à écrire. Si l'on transporte le sommet de ce cône

en un point de la surface, il la rencontrera suivant une génératrice au moins (en la supposant engendrée par une droite). Enfin, si l'on observe que le plan tangent en ce point contient la génératrice, il arrive que, en chaque point de la surface, les génératrices sont données par le plan tangent et le cône des directions asymptotiques; mais il est bon d'ajouter que ces deux surfaces peuvent donner aussi des droites non contenues sur la surface.

Cette méthode sera en général plus simple que celle qui consisterait à vérifier si la droite

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

peut rencontrer la surface de manière à se confondre avec elle. A cet effet, on éliminerait x et y entre ces équations et celle de la surface; on verrait ensuite si l'on peut choisir a, α, b, β de manière que l'équation en z soit identiquement satisfaite (quel que soit z).

La même méthode permet aussi de reconnaître si une surface contient des droites.

Théorème I. — *Une surface d'ordre m ne peut être coupée par un plan suivant plus de m droites.*

Théorème II. — *Par un point d'une surface il ne peut passer trois droites appartenant à cette surface, à moins que ce point ne soit singulier ou que les droites ne soient contenues dans un même plan.*

Car sans quoi, en effet, le trièdre ayant pour arêtes ces droites aurait ses trois faces tangentes en un même point à la surface. Il n'y aurait donc pas un lieu plan de tangentes.

Un autre moyen de s'assurer si une surface est réglée consiste à voir si ses coordonnées satisfont à une équation aux dérivées partielles que nous allons chercher.

Mettons les équations des génératrices sous la forme

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

et différentions en laissant constant le paramètre τ qui entre dans a, b, α, β. Appelons p, q les dérivées premières de z, puis r, s, t ses dérivées secondes, enfin u, v, w, ω ses dérivées troisièmes, nous aurons

$$(2) \qquad dx = a\,dz, \qquad dy = b\,dz;$$

or, on a

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

d'où, en éliminant dx, dy, dz,

$$(3) \qquad 1 = ap + bq.$$

Différentions encore en laissant τ constant, nous aurons

$$0 = a\,dp + b\,dq$$

ou

$$0 = a(r\,dx + s\,dy) + b(s\,dx + t\,dy);$$

or, en vertu de (2), dx et dy sont proportionnels à a et b; donc cette formule donne

$$(4) \qquad a^2 r + 2abs + b^2 t = 0.$$

Différentions encore en laissant τ constant, nous aurons

$$a^2\,dr + 2ab\,ds + b^2\,dt = 0$$

ou bien

$$a^2(u\,dx + v\,dy) + 2ab(v\,dx + w\,dy) + b^2(w\,dx + \omega\,dy) = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant dx et dy par a et b,

$$(5) \qquad a^3 u + 3a^2 b v + 3ab^2 w + b^3 \omega = 0.$$

En éliminant a et b entre (4) et (5), on aura l'équation différentielle cherchée, qui est du troisième ordre.

Enfin, voici un criterium qui pourra éviter des recherches superflues : *quand une surface est algébrique, elle ne peut être gauche que si sa classe est égale à son degré.*

Pour établir cette proposition, considérons une surface S d'ordre m qui soit gauche, coupons-la par une droite D, cette droite la rencontrera en m points a_1, a_2, ..., a_m par

lesquels passent des génératrices $G_1, G_2, \ldots, G_m$; les m plans qui passent par D et par $G_1, G_2, \ldots, G_m$ sont tangents quelque part. Je dis que, par la droite D, on ne peut pas en mener d'autres et, par suite, la surface m est bien de la classe m.

En effet, si par la droite D on pouvait mener un plan P tangent à la surface S ne contenant aucune des génératrices $G_1, G_2, \ldots, G_m$, le plan P couperait la surface suivant une courbe et une génératrice H qui rencontrerait D nécessairement en l'un des points $a_1, a_2, \ldots$ et se confondrait avec une des génératrices $G_1, G_2, \ldots$: le plan P se trouve donc parmi les m plans tangents déjà considérés. Donc, etc.

VII. — Lignes de striction des surfaces du second ordre.

La recherche directe de la ligne de striction d'une surface gauche ou du point central d'une génératrice peut être difficile, mais on peut tourner la difficulté en suivant la méthode que nous allons appliquer à l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le point central d'une génératrice est un point ou le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini. Nous avons donc, pour trouver la ligne de striction, à chercher le lieu des points où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini situé sur la même génératrice.

Soit

$$(1)\qquad \frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}=\lambda$$

une génératrice, on devra avoir

$$\frac{(x_0+\alpha\lambda)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta\lambda)^2}{b^2}-\frac{(z_0+\gamma\lambda)^2}{c^2}-1=0,$$

quel que soit λ, ou

$$(2) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

$$(3) \qquad \frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} - \frac{\gamma z_0}{c^2} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0.$$

Le plan tangent à l'infini sur la génératrice en question a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} = 0.$$

Exprimons que le plan tangent en x_0, y_0, z_0, qui a pour équation

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - \frac{z z_0}{c^2} = 1,$$

lui est perpendiculaire, nous aurons

$$(5) \qquad \frac{\alpha x_0}{a^4} + \frac{\beta y_0}{b^4} + \frac{\gamma z_0}{c^4} = 0.$$

En éliminant α, β, γ entre cette équation (3) et (4), on a l'une des équations de la ligne de striction; l'autre est (2). De (5) et (3) on tire

$$\alpha : \frac{y_0 z_0}{b^2 c^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \beta : \frac{z_0 x_0}{c^2 a^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)$$
$$= -\gamma : \frac{x_0 y_0}{a^2 b^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

et, en portant les valeurs proportionnelles à α, β, γ déduites de là dans (4), on a

$$\frac{y_0^2 z_0^2}{b^2 c^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 + \frac{z_0^2 x_0^2}{c^2 a^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{x_0^2 y_0^2}{a^2 b^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{b^6 c^6 x_0^2}(b^2 + c^2)^2 + \frac{1}{a^6 c^6 y_0^2}(a^2 + c^2)^2 - \frac{1}{a^6 b^6 z_0^2}(b^2 - a^2)^2 = 0;$$

c'est l'équation de la ligne de striction que nous nous proposions d'obtenir.

Quand on suppose $a = b$, on a

$$y_0^2 z_0^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)^2 + z_0^2 x_0^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 = 0$$

ou

$$y_0^2 + x_0^2 = 0, \qquad z_0^2 = 0,$$

ce qui donne le cercle de gorge; l'autre solution est évidemment étrangère à la question.

La ligne de striction du paraboloïde s'obtiendra en observant que, si l'on prend pour plan des xy un plan directeur, la projection de la ligne de striction sera précisément le contour apparent du paraboloïde sur les plans des xy, pourvu que l'axe des z soit perpendiculaire au plan directeur.

Dans le paraboloïde équilatère, qui est un conoïde droit, la ligne de striction est l'axe même du conoïde, c'est-à-dire une génératrice.

On peut remarquer que, dans la sphère comme dans les cylindres, la ligne de striction est indéterminée.

VIII. — Étude des lignes tracées sur les surfaces gauches.

Reprenons les équations d'une surface gauche

(1) $$X = x + \alpha\lambda, \qquad Y = y + \beta\lambda, \qquad Z = z + \gamma\lambda,$$

et rappelons les formules suivantes

(2) $$\cos(\delta, x) = \frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\varphi'}, \qquad \ldots,$$

(3) $$\varphi'^2 = \sum \alpha'^2,$$

(4) Λ = distance du point x, y, z au point central $= \sum \dfrac{\alpha' x'}{\varphi'^2}$,

(5) cosinus de l'angle que le plan central fait avec $zOy = \dfrac{\alpha'}{\varphi'}, \quad \ldots,$

(6) $$k = \frac{1}{\varphi'^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix},$$

on trouve, en appelant I l'angle de la génératrice et de la directrice,

$$(7)\quad \begin{cases} L = \sum \left(\dfrac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 = 1, \\ M = \sum \left(\dfrac{\partial X}{\partial \mu}\right)^2 = 1 + 2\lambda \sum \alpha' x' + \lambda^2 \sum \alpha'^2 \\ \qquad\qquad\qquad = 1 + 2\lambda\varphi'^2 \Lambda + \lambda^2 \varphi'^2, \\ R = \sum \alpha x' \qquad = \cos I, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} l = 0, \\ m = -\begin{vmatrix} x'' + \lambda\alpha'' & y'' + \lambda\beta'' & z'' + \lambda\gamma'' \\ x' + \lambda\alpha' & y' + \lambda\beta' & z' + \lambda\gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \\ r = k\varphi'^2; \end{cases}$$

enfin rappelons que, ω désignant l'angle que le plan tangent fait avec le plan central, on a

$$(9)\quad \begin{cases} \Lambda = \dfrac{\sin\omega}{\varphi'}, \qquad k = \dfrac{\cos\omega}{\varphi'}, \\ \Lambda = k \operatorname{tang}\omega. \end{cases}$$

Il est souvent avantageux de prendre pour directrice la ligne de striction; alors il faut supposer $\omega = 0$, $\Lambda = 0$, et l'on a

$$L = 1, \qquad M = 1 + \lambda^2\varphi'^2, \qquad R = \cos I.$$

I est alors l'angle de la ligne de striction avec la génératrice; pour la ligne de striction elle-même, on a

$$L = 1, \qquad M = 1, \qquad \frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial \mu} = 0, \qquad R = \cos I, \qquad l = 0,$$

$$m = -\frac{1}{\rho}\sin\theta,$$

ρ désignant le rayon de courbure de la ligne de striction et θ l'angle du plan osculateur de cette ligne de striction avec le plan central.

La courbure géodésique de la ligne de striction sera donnée par la formule

$$\sqrt{LM - R^2}\,\frac{\cos\theta_\mu}{\rho_\mu} = \frac{R}{2M\sqrt{M}}\frac{\partial M}{\partial \mu} + \frac{1}{2\sqrt{M}}\frac{\partial M}{\partial \lambda} - \frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\partial R}{\partial \mu};$$

on en déduira

$$(10) \qquad \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{dI}{d\mu}.$$

La torsion géodésique $\frac{1}{g}$ est donnée par la formule

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{LM - R^2}}\left[\lambda'^2(lR - Lr) + \lambda'\mu'(lM - mL) + \mu'^2(rM - Rm)\right];$$

pour la ligne de striction on a

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\sin I}\left(k\varphi'^2 - \frac{\cos I \sin\theta}{\rho}\right);$$

cette formule peut encore s'écrire

$$(11) \qquad \frac{d\theta}{d\mu} + \frac{1}{T} = \frac{k\varphi'^2}{\sin I} + \frac{\sin\theta}{\rho \tang I}.$$

Les formules (10) et (11) ont conduit Laguerre, comme nous allons le voir, à une remarque fort intéressante.

IX. — Sur quelques surfaces gauches applicables les unes sur les autres.

Soient

$$(1) \qquad X = x + \lambda\alpha, \qquad Y = y + \lambda\beta, \qquad Z = z + \lambda\gamma,$$

$$(2) \qquad X = x_1 + \lambda\alpha_1, \qquad Y = y_1 + \lambda\beta_1, \qquad Z = z_1 + \lambda\gamma_1$$

les équations de deux surfaces gauches; appelons L_1, M_1, N_1, ... ce que deviennent les quantités appelées plus haut L, M, N, ... Quand on change $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ en $x_1, y_1, z_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, les surfaces (1) et (2) seront applicables si l'on a (p. 44)

$$(3) \qquad L = L_1, \qquad M = M_1, \qquad R = R_1;$$

or on aura $R = R_1$ si $\cos I = \cos I_1$ ou si $I = I_1$. Si l'on suppose que les deux directrices soient les lignes de striction des surfaces, les conditions (3) seront vérifiées : 1° si les lignes de striction coupent les génératrices sous le même angle, 2° si l'on a $M = M_1$ ou

$$1 + 2\lambda\varphi' \sin\omega + \lambda^2\varphi'^2 = 1 + 2\lambda\varphi'_1 \sin\omega_1 + \lambda^2\varphi'^2_1,$$

car $L_1 = L = 1$. Cette formule peut s'écrire

$$2\lambda(\varphi' \sin\omega - \varphi'_1 \sin\omega_1) + \lambda^2(\varphi'^2 - \varphi'^2_1) = 0,$$

et pour que ceci ait lieu, quel que soit λ, il faut que $\omega = \omega_1$ et $\varphi' = \varphi'_1$. Ainsi :

Deux surfaces gauches seront applicables l'une sur l'autre, génératrice sur génératrice, si les lignes de striction coupent les génératrices sous le même angle, si les paramètres de distribution sont les mêmes, et si aux points correspondants les plans tangents font des angles égaux avec les plans centraux. (On peut remplacer les paramètres de distribution par les angles φ'.)

Maintenant reprenons les formules (10) et (11) du paragraphe précédent

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dI}{d\mu} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}, \\ \dfrac{d\theta}{d\mu} + \dfrac{1}{T} = \dfrac{k\varphi'^2}{\sin I} + \dfrac{\sin\theta}{\rho \tang I}; \end{cases}$$

supposons que l'on déforme une surface gauche en conservant la rectitude des génératrices, I, φ', k' restant les mêmes ainsi que μ. Le θ, le ρ et le T de la ligne de striction seront toujours liés par les équations précédentes, et les équations permettront de trouver toutes les surfaces applicables (génératrice sur génératrice). La ligne de striction sera alors l'inconnue à déterminer.

Si, avec M. Laguerre, nous supposons que l'on veuille toutes les surfaces gauches applicables (génératrice sur géné-

ratrice) sur un hyperboloïde de révolution, il faudra supposer $l =$ const., $k =$ const., $\varphi' =$ const.; alors la première des équations (1) donne

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = 0,$$

et, comme ρ n'est pas infini, $\cos\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ligne de striction est géodésique; la deuxième équation (1) donne alors

$$\frac{1}{T} = A + \frac{B}{\rho},$$

A et B désignant deux constantes. On voit que :

Les surfaces applicables (génératrice sur génératrice) sur un hyperboloïde de révolution, jouissent de cette propriété curieuse que leurs lignes de striction sont telles qu'il existe une relation linéaire entre leurs courbures et leurs torsions.

M. Bertrand, comme nous le verrons un peu plus loin, a rencontré ces courbes, telles qu'entre leur courbure et leur torsion il existe une relation linéaire; ce sont les seules dont la normale principale puisse servir de normale principale à une autre courbe.

Nous signalerons, parmi les surfaces gauches applicables les unes sur les autres, les surfaces de Poncelet qui, dans le mouvement d'un corps solide, sont les lieux des axes instantanés dans le corps lui-même et dans l'espace absolu.

X. — Théorème de M. O. Bonnet.

M. O. Bonnet, dans le tome LVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, a démontré que, *si deux surfaces gauches étaient applicables l'une sur l'autre, les génératrices de l'une s'appliquent nécessairement sur les génératrices de l'autre.*

Pour démontrer cette proposition, nous mettrons les ds^2 des deux surfaces sous la forme

$$ds^2 = \Lambda\, d\lambda\, d\mu.$$

Nous montrerons ensuite que le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$ qui détermine la génératrice rectiligne ne dépend que de Λ; il sera alors le même pour les deux surfaces, et les génératrices des deux surfaces s'appliqueront l'une sur l'autre en même temps que les lignes coordonnées.

Lorsqu'une surface est gauche, il y a une ligne tracée sur la surface et telle que l'on a

$$\begin{aligned} d^2y\, dz - d^2z\, dy &= 0,\\ d^2z\, dx - d^2x\, dz &= 0,\\ d^2x\, dy - d^2y\, dx &= 0 \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz};$$

c'est la génératrice de la surface, l'une de ces équations pouvant d'ailleurs être remplacée par l'équation de la surface. Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\, d\lambda^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\, d\lambda\, d\mu + \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\, d\mu^2}{\frac{\partial x}{\partial\lambda}\, d\lambda + \frac{\partial x}{\partial\mu}\, d\mu} = \ldots,$$

et l'on en déduit

$$(1)\qquad \frac{\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\, d\lambda^2 + 2\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\, d\lambda\, d\mu + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\, d\mu^2}{\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 d\lambda + \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}\, d\mu} = \ldots;$$

or on a

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \Lambda,$$

d'où l'on tire

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}.$$

Portant ces valeurs dans (1), on trouve

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}\,d\mu = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\,d\lambda;$$

c'est l'équation qui détermine le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$ pour une génératrice, et comme l'on en tire

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu} : \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda},$$

on voit que la direction de la génératrice est la même dans toutes les surfaces gauches applicables les unes sur les autres.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on considère l'équation

$$\Lambda = \text{const.},$$

elle représente une série de lignes pour lesquelles le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$ est donné par la formule

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}\,d\mu = 0,$$

tandis que le même rapport pour les génératrices est donné par la formule

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\,d\lambda - \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}\,d\mu = 0;$$

les lignes en question forment donc avec les génératrices et les lignes coordonnées un faisceau harmonique.

Le théorème de M. O. Bonnet donne une grande importance aux théorèmes qui ont été établis au paragraphe précédent.

XI. — Lignes géodésiques des surfaces gauches.

L'équation générale des géodésiques est [p. 112, formule (18)]

$$2\frac{d}{ds}(\sqrt{L}\cos i) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial R}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s}\frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2;$$

si l'on observe que

$$L = 1, \qquad R = \sum \alpha x', \qquad M = 1 + 2\Lambda\lambda\varphi'^2 + \lambda^2\varphi'^2,$$

cette équation devient

$$-\sin i\frac{di}{ds} = \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2(\Lambda + \lambda)\varphi'^2,$$

et, comme $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\mu}$,

$$-\sin i\frac{di}{ds} = \frac{d\varphi^2}{ds^2}(\Lambda + \lambda) = \frac{d\varphi}{d\mu}\frac{d\mu}{ds}\frac{d\varphi}{ds}(\Lambda + \lambda).$$

Or, en appelant ω l'angle que le plan central fait avec le plan tangent, et en supposant que μ soit l'arc de la ligne de striction, $\lambda = \Lambda$ et $\Lambda\frac{d\varphi}{ds} = \sin\omega$; on a alors

$$-\sin i\frac{di}{ds} = 2\sin\omega\frac{d\varphi}{d\mu}\frac{d\mu}{ds}$$

ou encore

$$-\sin i\, di = 2\sin\omega\, d\varphi$$

ou enfin

$$di\sin i + 2d\varphi\sin\omega = 0 : \tag{α}$$

telle est l'équation des lignes géodésiques; il ne faut pas oublier que i est l'angle que fait la géodésique avec la génératrice.

Il ne paraît pas possible d'intégrer d'une façon générale l'équation des lignes géodésiques, même en employant la méthode de Jacobi.

Néanmoins, il est permis de tirer quelques conséquences importantes de l'équation (α); cette équation montre, en effet, que si $di = 0$, on a

$$d\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sin \omega = 0,$$

ce qui signifie que :

Si une géodésique coupe les génératrices sous un angle i constant, les génératrices restent parallèles à une même droite, ou bien son plan tangent est le même tout le long d'une génératrice; donc :

Si dans une surface réglée une seule géodésique rencontre les génératrices sous un angle constant, cette surface est développable, et alors évidemment toutes les géodésiques jouissent de la même propriété, puisque, après le développement de la surface, les géodésiques doivent se transformer en lignes droites; il est clair alors que *la développable doit se réduire à un cylindre.*

XII. — Lignes asymptotiques.

Les lignes asymptotiques ont pour équation

$$l\,d\lambda^2 + 2r\,d\lambda\,d\mu + m\,d\mu^2 = 0,$$

c'est-à-dire en remplaçant l, r, m par leurs valeurs et en supprimant la solution $\mu = \text{const.}$, qui donne les génératrices

$$2k\varphi'^2 d\lambda + (A + 2B\lambda + C\lambda^2)d\mu = 0;$$

k, A, B, C ne contiennent pas λ; cette équation est donc de la forme

$$(1) \qquad \frac{d\lambda}{d\mu} = G + 2H\lambda + K\lambda^2;$$

c'est une de celles que l'on sait intégrer quand on en connaît une solution. Cette remarque est due à M. O. Bonnet.

Lorsque la directrice est une ligne asymptotique, $G=0$ et $A=0$, alors (1) prend la forme

$$\frac{d\lambda}{d\mu}=2H\lambda+K\lambda^2,$$

formule que l'on sait toujours intégrer.

Les équations des tangentes aux lignes asymptotiques sont

$$\frac{X-x-\alpha\lambda}{(x'+\lambda\alpha')d\mu+\alpha d\lambda}=\frac{Y-y-\beta\lambda}{(y'+\lambda\beta')d\mu+\beta d\lambda}=\frac{Z-z-\gamma\lambda}{(z'+\lambda\gamma')d\mu+\gamma d\lambda},$$

et on peut les écrire comme il suit

$$\frac{X-x-\alpha\lambda}{P+2Q\lambda+R\lambda^2}=\frac{Y-y-\beta\lambda}{P'+2Q'\lambda+R'\lambda^2}=\frac{Z-z-\gamma\lambda}{P''+2Q''\lambda+R''\lambda^2},$$

P, P', P'', ... désignant des fonctions de μ seul. L'élimination de λ fera connaître le lieu des tangentes aux lignes asymptotiques tout le long d'une génératrice. Pour faire cette élimination, on égalera la suite des rapports précédents à s, et l'on aura

$$(A)\qquad\begin{cases} X-x-Ps-\alpha\lambda-2Q\lambda s-R\lambda^2 s=0,\\ Y-y-P's-\beta\lambda-2Q'\lambda s-R'\lambda^2 s=0,\\ Z-z-P''s-\gamma\lambda-2Q''\lambda s-R''\lambda^2 s=0;\end{cases}$$

on peut obtenir une équation qui ne contienne plus λ^2; pour cela, il suffit d'observer que R, R', R'' sont de la forme $G\alpha$, $G\beta$, $G\gamma$; en multipliant alors la première formule par α' la seconde par β' et la troisième par γ', et en ajoutant après avoir observé que $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$, on trouve un résultat de la forme

$$(B)\qquad T-P'''s-\lambda-2Q'''\lambda s=0,$$

T désignant une fonction linéaire de X, Y, Z dont les coefficients ne dépendent que de μ et P''', Q''' des nouvelles fonctions de μ seul. Des équations (A) et (B) on tire pour s, λ,

λs et $\lambda^2 s$ des valeurs fonctions linéaires de X, Y, Z; en égalant alors la valeur de λs au produit des valeurs de λ et de s, on a une équation du second degré en X, Y, Z; cette équation ne peut représenter qu'un hyperboloïde à une nappe, un paraboloïde hyperbolique ou leurs variétés. Donc, en général, *les tangentes aux asymptotiques d'une surface gauche menées par tous les points d'une même génératrice forment un hyperboloïde à une nappe.*

Il est facile de voir que cet hyperboloïde est osculateur de la surface gauche tout le long de la génératrice commune; cela résulte du théorème plus général que voici :

Deux surfaces tangentes tout le long d'une ligne de longueur finie et qui ont tout le long de cette ligne mêmes directions asymptotiques, ou plus généralement même indicatrice, sont osculatrices le long de la ligne de contact.

En effet, soient p, q, r, s, t les $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ... de la première surface, p', q', r', s', t' ceux de la seconde, on a

$$(\mathrm{A}') \qquad p = p', \qquad q = q,$$

et comme les indicatrices ont pour équations

$$\mathrm{X}^2 r + 2\mathrm{XY}s + \mathrm{Y}^2 t = 1,$$
$$\mathrm{X}^2 r' + 2\mathrm{XY}s' + \mathrm{Y}^2 t' = 1,$$

pour que ces deux indicatrices soient identiques (c'est-à-dire semblables), il faut qu'il existe une quantité k, telle que

$$(\mathrm{B}') \qquad r = kr', \qquad s = ks', \qquad t = kt';$$

les formules (A′), (B′) ont lieu tout le *long d'une ligne.* Soient dx, dy des accroissements subis par x, y quand on se déplace le long de cette ligne, les formules (A′) donnent

$$r\,dx + s\,dy = r'\,dx + s'\,dy'.$$

Remplaçant r et s par kr et ks, on a évidemment $k = 1$; p, q, r, s, t étant égaux à p', q', r', s', t', les surfaces ont

mêmes rayons de courbure principaux tout le long de la ligne commune. C. Q. F. D.

L'hyperboloïde osculateur dont nous venons de signaler l'existence pourra être construit dès que l'on saura mener des tangentes à trois asymptotiques aux points où elles rencontrent la génératrice de la surface.

Si la surface gauche est à plan directeur, l'hyperboloïde osculateur dégénère en paraboloïde et devient paraboloïde de raccordement. En effet, il est facile de voir que, quand on prend $\gamma = 0$, l'équation des lignes asymptotiques est seulement

$$d\lambda = (A + 2B\lambda)d\mu,$$

et $C = 0$; cette équation est linéaire, et, par suite, toujours intégrable par les quadratures.

Quant aux équations (A), elles ne contiennent plus de termes en λ^2; on peut en tirer immédiatement λ, s et λs en fonctions linéaires de $X - x$, $Y - y$, $Z - z$. Soient U, V, W ces fonctions linéaires, l'équation du lieu des tangentes aux asymptotiques est

$$UV = W :$$

c'est l'équation d'un paraboloïde hyperbolique.

Le paraboloïde de raccordement et le paraboloïde osculateur doivent coïncider, car on ne peut évidemment construire qu'un seul paraboloïde tangent à la surface tout le long d'une génératrice, ce paraboloïde étant déterminé par trois tangentes à la surface.

XIII. — Courbure des surfaces gauches. — Lignes de courbure constante.

L'équation aux rayons de courbure principaux d'une surface quelconque est

$$\left(\frac{r\rho}{\sqrt{LM - R^2}} - R\right)^2 = \left(\frac{l\rho}{\sqrt{LM - R^2}} - L\right)\left(\frac{m\rho}{\sqrt{LM - R^2}} - M\right);$$

sa courbure totale K sera alors donnée par la formule

$$K = \frac{r^2 - lm}{(LM - R^2)^2}.$$

Prenons la ligne de striction pour directrice, nous aurons

$$L = 1, \quad l = 0, \quad R = \cos i, \quad r = k\varphi'^2, \quad M = 1 + 2\lambda\Lambda\varphi'^2 + \lambda^2\varphi'^2;$$

pour le cas où la ligne de striction est directrice $\Lambda = 0$, et alors $M = 1 + \lambda^2\varphi'^2$; on a donc

$$K = \frac{k^2\varphi'^4}{(1 + \lambda^2\varphi'^2 - \cos^2 i)^2} = \frac{k^2\varphi'^4}{(\sin^2 i + \lambda^2\varphi'^2)^2}.$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$K = \frac{k^2}{\left(\frac{\sin^2 i}{\varphi'^2} + \lambda^2\right)^2}$$

ou, en vertu de la formule (9) du § VIII,

$$K = \frac{k^2}{(k^2 + \lambda^2)^2}.$$

Cette formule remarquable est due à M. Bonnet; elle fait connaître la manière dont la courbure totale varie le long d'une génératrice.

Supposons maintenant $R = 0$, et la directrice d'ailleurs quelconque. Quand $m = 0$, deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires, car l'équation aux rayons de courbure se réduit à

$$r^2\rho^2 = L^2M^2 \quad \text{ou} \quad \rho = \pm\frac{LM}{r};$$

or on a

$$m = -\begin{vmatrix} x'' + \lambda\alpha'' & y'' + \lambda\beta'' & z'' + \lambda\gamma'' \\ x' + \lambda\alpha' & y' + \lambda\beta' & z' + \lambda\gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix};$$

l'équation $m = 0$ aura donc, en général, deux solutions, puisqu'elle est du second degré en λ. Donc :

Sur toute surface gauche il existe deux courbes, ou plus

exactement, sur toute génératrice d'une surface gauche, il existe deux points où la surface a ses deux rayons de courbure égaux et de signes contraires.

Ces courbes peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires; elles peuvent être confondues ou indéterminées.

L'une d'elles, au moins, sera rejetée à l'infini si

$$\begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation exprime qu'une courbe ayant pour tangentes des droites parallèles aux génératrices de la surface est plane et, par conséquent, que la surface gauche a toutes ses génératrices parallèles à un même plan; cette surface est donc à plan directeur.

Si les lignes précédentes sont indéterminées, en chaque point de la surface $m = 0$, et il y a deux rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires; les quantités A, B, C, définies au paragraphe précédent par l'équation

$$m = (A + 2B\lambda + C\lambda^2),$$

sont nulles, les lignes asymptotiques $d\lambda = -\frac{m}{2k}\,d\mu$ sont représentées par $d\lambda = 0$ ou $\lambda = \text{const.}$, la surface est à plan directeur; on peut alors supposer $\gamma = 0$; les conditions $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ peuvent alors s'écrire

$$(a)\quad \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad (\alpha''\beta - \beta''\alpha)z' - z''(\alpha'\beta - \beta'\alpha) = 0,\quad 0 = 0.$$

La seconde de ces formules donne

$$\frac{\alpha''\beta - \beta''\alpha}{\alpha'\beta - \beta'\alpha} = \frac{z''}{z'}$$

ou, en intégrant,

$$\alpha'\beta - \beta'\alpha = hz',$$

h désignant une constante. On peut poser $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$; on a alors

$$(b) \qquad -\theta' = hz', \qquad \theta = -hz - h'.$$

La première des formules (a) peut s'écrire

$$(c) \qquad \cos\theta(y''z' - z''y') - \sin\theta(x''z' - z''x') = 0.$$

Adjoignons à cette équation la suivante

$$(d) \qquad \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0 \qquad \text{ou} \qquad x'\cos\theta + y'\sin\theta = 0;$$

et nous avons

$$(y''z' - z''y')y' + (x''z' - z''x')x' = 0$$

ou

$$(y''y' + x''x')z' - (x'^2 + y'^2)z'' = 0,$$

ou

$$-z'^2z'' - (1 - z'^2)z'' = 0$$

ou enfin $z'' = 0$; on en conclut

$$z' = a, \qquad z = a\mu + b,$$

a et b désignant deux constantes; ainsi, en transformant convenablement les coordonnées, la formule (b) et celle-ci donnent

$$z = a\mu = \frac{\theta}{h};$$

on a ensuite, au lieu de (d),

$$x'\cos ah\mu + y'\sin ah\mu = 0,$$

$$x'^2 + y'^2 = 1 - a^2,$$

d'où l'on tire

$$y'^2(1 + \operatorname{tang}^2 ah\mu) = 1 - a^2,$$

$$y' = \sqrt{1 - a^2}\cos ah\mu$$

et, par suite,

$$y = \sqrt{1 - a^2}\,\frac{\sin ah\mu}{ah} + \text{const.},$$

$$x = \sqrt{1 - a^2}\,\frac{\cos ah\mu}{ah} + \text{const.}$$

Il résulte de là que :

La surface gauche dont les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires : 1° est à plan directeur; 2° les génératrices s'appuient sur une courbe hélicoïdale tracée sur un cylindre à base circulaire en restant normales à cette hélice.

La surface gauche qui a ses deux rayons de courbure égaux et de signes contraires est l'*hélicoïde gauche à plan directeur;* il est facile de voir que les génératrices rencontrent l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice, et par suite la surface en question est un conoïde. C'est la surface de la *vis à filet carré.*

XIV. — Des surfaces gauches dont les génératrices sont les normales principales d'une courbe gauche.

Les normales principales d'une courbe ne sont pas les génératrices d'une surface gauche quelconque; en d'autres termes, sur une surface gauche quelconque il n'existe pas de courbe qui ait pour normales principales ses génératrices. En effet, si sur une surface gauche il existe une courbe ayant pour normales principales les génératrices, son plan osculateur sera tangent à la surface; cette courbe sera donc une ligne asymptotique. Ainsi, pour qu'il existe une courbe ayant pour normales principales les génératrices, il faut que cette courbe satisfasse à la fois à deux équations différentielles, à savoir : 1° à l'équation des asymptotiques; 2° à l'équation des trajectoires orthogonales des génératrices, ce qui n'est pas possible en général.

D'ailleurs, soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les neuf cosinus qui déterminent la tangente, la normale principale, la binormale d'une courbe gauche en x, y, z; soient ρ et T son rayon de courbure et son rayon de torsion si on la prend pour directrice de la surface gauche qui a pour génératrices

ses normales principales, les équations de cette surface gauche seront

$$X = x + \lambda a',$$
$$Y = y + \lambda b',$$
$$Z = z + \lambda c';$$

dans cette hypothèse, on trouve

$$L = 1, \qquad M = \left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{T^2}, \qquad R = 0,$$

$$l = 0, \qquad m = -\lambda\left\{\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'\right]\frac{\lambda}{T} - \left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left[\frac{1}{T^2} + \left(\frac{1}{T}\right)'\right]\right\},$$

(1) $$r = \frac{1}{T} = k\varphi'^2,$$

(2) $$\varphi'^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{T^2};$$

quant au λ du point central, il est donné par la formule

(3) $$\lambda = \frac{T^2\rho}{\rho^2 + T^2}.$$

On voit donc que :

Si une surface est telle que ses génératrices soient les normales principales d'une courbe gauche, il faut que son paramètre de distribution k soit égal à la torsion de cette courbe multiplié par φ'^2.

En éliminant ρ et T entre (1), (2) et (3), on a la relation

$$\lambda = \frac{\sqrt{\varphi'^2 - k^2\varphi'^4}}{\varphi'^2}$$

ou

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - k^2\varphi'^2}}{\varphi'}.$$

XV. — Des surfaces gauches dont les génératrices sont les binormales d'une courbe.

En faisant toujours usage des mêmes notations, l'équation d'une surface gauche, lieu des binormales d'une courbe à double courbure, sera

$$X = x + \lambda a'', \quad Y = y + \lambda b'', \quad Z = z + \lambda c''.$$

On a ici

$$L = 1, \qquad M = 1 + \frac{\lambda^2}{T^2}, \qquad R = 0,$$

$$l = 0, \quad m = \frac{1}{\rho} - \frac{\lambda^2}{\rho T^2} - \lambda\left(\frac{1}{T}\right)', \qquad r = \frac{1}{T};$$

on voit que, dans le cas actuel, le paramètre de distribution est égal à la torsion de la directrice.

Le point central est donné par les formules

$$\lambda = \frac{\sum a'x'}{\varphi'}, \qquad \varphi'^2 = \sum a'^2;$$

on a donc

$$\varphi'^2 = \sum\left(\frac{a'}{T}\right)^2 = \frac{1}{T^2}, \qquad \varphi' = \frac{1}{T}, \qquad \lambda = 0.$$

Ainsi la directrice est précisément la ligne de striction, qui, dans ce cas, est géodésique.

XVI. — Théorème de M. Bertrand.

Nous allons voir que, si, sur une surface gauche, il existe deux courbes qui ont les génératrices pour normales principales, ces courbes sont d'une nature toute particulière et aucune d'elles ne peut être choisie arbitrairement. M. Bertrand a prouvé, en effet, que, *si les normales principales*

d'une courbe sont les normales principales d'une autre courbe, il existe entre la courbure et la torsion de cette courbe une relation linéaire.

En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une courbe; a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les neuf cosinus qui déterminent sa tangente, sa normale principale et sa binormale; ρ son rayon de courbure, T son rayon de torsion; si les normales principales de cette courbe sont aussi normales principales d'une autre courbe, soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de cette autre courbe situé sur la normale principale de la première en x, y, z; soit l la distance des points x, y, z et x_1, y_1, z_1; soient a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, a''_1, b''_1; c''_1 les neuf cosinus qui déterminent la tangente, la normale principale et la binormale de la seconde courbe,

$$a'_1 = a', \qquad b'_1 = b', \qquad c'_1 = c';$$

la longueur l est constante, car dl, en appelant ds et ds_1 les arcs des deux courbes, est égal à

$$ds \cos(ds,\ l) + ds_1 \cos(ds_1,\ l) = 0.$$

En second lieu, si l'on appelle i l'angle des tangentes correspondantes aux deux courbes, ou, si l'on veut, l'angle des éléments ds, ds_1, on aura

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = \cos i,$$

d'où

$$a_1 da + a\, da_1 + \ldots = -\sin i\, di,$$

ou, par les formules de Serret,

$$\begin{aligned} &a' a_1 \frac{ds}{\rho} + b' b_1 \frac{ds}{\rho} + c' c_1 \frac{ds}{\rho} \\ &+ a'_1 a \frac{ds_1}{\rho_1} + b'_1 b \frac{ds_1}{\rho_1} + c'_1 c \frac{ds_1}{\rho_1} = -\sin i\, di, \end{aligned}$$

ou, en observant que $a'_1 = a'$, $b'_1 = b'$, $c'_1 = c'$

$$\sin i\, di = 0;$$

donc $\sin i = 0$ ou $di = 0$; en tout cas i est constant.

Maintenant on a

$$(1)\quad \begin{cases} a\,(x-x_1)+b\,(y-y_1)+c\,(z-z_1)=0, \\ a''(x-x_1)+b''(y-y_1)+c''(z-z_1)=0, \\ a'(x-x_1)+b'(y-y_1)+c'(z-z_1)=l; \end{cases}$$

et, en différentiant les deux premières en ayant égard aux formules de Serret,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\,[a'(x-x_1)+\ldots] \\ \qquad + a^2+b^2+c^2-(aa_1+bb_1+cc_1)\,\dfrac{ds_1}{ds}=0, \\ \dfrac{1}{T}\,[a''(x-x_1)+\ldots] \\ \qquad + aa''+bb''+cc''-(a''a_1+b''b_1+c''c_1)\,\dfrac{ds_1}{ds}=0; \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{\rho}+1-\cos i\,\dfrac{ds_1}{ds}=0, \\ \dfrac{l}{T}-\quad \sin i\,\dfrac{ds_1}{ds}=0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \frac{1}{\rho}+\frac{1}{l}-\frac{1}{T}\operatorname{cotang} i=0.$$

Il existe donc, comme nous l'avions annoncé, une relation linéaire entre la courbure et la torsion de la courbe dont les normales principales sont les normales principales d'une autre courbe.

Réciproquement, s'il existe entre la courbure et la torsion d'une courbe une relation linéaire, la normale principale de cette courbe appartiendra à une autre courbe.

En effet, toute relation linéaire entre la courbure et la torsion peut se mettre sous la forme (4) en la résolvant par rapport à $\frac{1}{\rho}$ et en appelant $\cot i$ le coefficient de $\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{l}$ le

terme tout connu. Ceci posé, faisons

$$x = x_1 + la',$$
$$y = y_1 + lb',$$
$$z = z_1 + lc';$$

ces équations déterminent la courbe x_1, y_1, z_1. Si l'on différentie, on a

$$a = a_1 \frac{ds_1}{ds} - l\left(\frac{a}{\rho} + \frac{a''}{T}\right), \quad \ldots$$

ou, en vertu de (4),

$$a \frac{1}{T} \cot i = \frac{a_1}{l} \frac{ds_1}{ds} - \frac{a''}{T}, \quad \ldots,$$

ou encore

$$\frac{1}{T}(a \cos i + a'' \sin i) = \frac{a_1}{l} \sin i \frac{ds_1}{ds}, \quad \ldots.$$

Élevant ces équations au carré et ajoutant, on a

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\sin^2 i}{l^2}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2.$$

Les équations précédentes peuvent alors s'écrire

$$a \cos i + a'' \sin i = \pm a_1, \quad \ldots;$$

en différentiant, il vient

$$\frac{a'}{\rho} \cos i + \frac{a'}{T} \sin i = \pm \frac{a'_1}{\rho_1} \frac{ds_1}{ds};$$

on en conclut

$$aa'_1 + bb'_1 + cc'_1 = 0,$$
$$a'' a'_1 + b'' b'_1 + c'' c'_1 = 0;$$

donc la normale principale, au lieu des points x_1, y_1, z_1, se confond avec la normale principale au lieu des points x, y, z.

C. Q. F. D.

On voit que

$$\left(\frac{1}{\rho} \cos i + \frac{1}{T} \sin i\right)^2 = \frac{1}{\rho_1^2}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2.$$

Pour que la normale principale d'une courbe soit normale principale d'une infinité d'autres courbes, il faut que la relation (4) ait lieu, quel que soit l; alors $i = 0$, toutes les courbes sont parallèles et $\frac{1}{T} = 0$.

XVII. — Surfaces gauches, lieux des axes de glissement.

Considérons une courbe gauche. Soient a, b, c, ... les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, R le rayon de courbure; T le rayon de torsion au point x, y, z; ds l'arc de courbe quand le trièdre trirectangle lié à la courbe se déplace; l'axe instantané de rotation est, comme on sait, la droite rectifiante, et les composantes de la rotation instantanée sont

$$p\,ds = -\frac{ds}{T}, \qquad q\,ds = 0, \qquad r\,ds = \frac{ds}{R}.$$

Cherchons l'axe de glissement; il faudra écrire que le point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ par rapport aux axes mobiles éprouve un déplacement parallèle à la droite rectifiante. On devra donc avoir

$$\frac{dx + \xi\,da + \eta\,da' + \zeta\,da''}{ap + a'q + a''r} = \frac{dy + \xi\,db + \eta\,db' + \zeta\,db''}{bp + b'q + b''r}$$
$$= \frac{dz + \xi\,dc + \eta\,dc' + \zeta\,dc''}{cp + c'q + c''r}$$

ou bien

$$\frac{a + a'\frac{\xi}{R} - \eta\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right) + a'\frac{\zeta}{T}}{\frac{a''}{R} - \frac{a}{T}} = \ldots;$$

ces équations peuvent s'écrire, en multipliant haut et bas la première fraction par a, la seconde par b, la troisième par c et en ajoutant, etc.,

$$\frac{1 - \frac{\eta}{R}}{-\frac{1}{T}} = \frac{\frac{\xi}{R} + \frac{\zeta}{T}}{0} = \frac{-\frac{\eta}{T}}{\frac{1}{R}};$$

ou

$$(1)\qquad \frac{\xi}{R}+\frac{\zeta}{T}=0,\qquad \eta=\frac{T^2R}{R^2+T^2};$$

ainsi l'axe de glissement est parallèle à la droite rectifiante, et à une distance du plan rectifiant égale à $\frac{T^2R}{R^2+T^2}$; son équation sera donc, par rapport aux coordonnées ordinaires,

$$(2)\qquad \frac{X-x-\frac{T^2R}{R^2+T^2}a'}{\frac{a}{T}-\frac{a''}{R}}=\frac{Y-y-\frac{T^2R}{R^2+T^2}b'}{\frac{b}{T}-\frac{b''}{R}}=\ldots.$$

Les équations (1) montrent que *le lieu des axes de glissement dans le solide lié aux axes mobiles est un conoïde droit ayant pour plan directeur le plan rectifiant et la normale principale pour axe;* on peut même dire que c'est un conoïde droit quelconque; R et T peuvent être choisis arbitrairement. Les équations (2) en multipliant le premier membre haut et bas par a, le second par b, le troisième par c et en ajoutant, etc., donneront

$$\left(\frac{a''}{T}+\frac{a}{R}\right)(X-x)+\left(\frac{b''}{T}+\frac{b}{R}\right)(Y-y)+\left(\frac{c''}{T}+\frac{c}{R}\right)(Z-z)=0,$$

$$a'(X-x)+b'(Y-y)+c'(Z-z)=\frac{T^2R}{R^2+T^2};$$

la première de ces équations peut s'écrire

$$\frac{da'}{ds}(X-x)+\frac{db'}{ds}(Y-y)+\frac{dc'}{ds}(Z-z)=0;$$

la droite (2) est parallèle à la plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines.

Il résulte de là qu'à toute courbe gauche correspond un conoïde. Mais, réciproquement, à un conoïde correspondent une infinité de courbes gauches ayant les génératrices de ce conoïde pour axes de glissement. En effet, donnons-nous un conoïde

$$(3)\qquad \zeta=m\xi,\qquad \eta=n,$$

m et n désignant des fonctions données de s; en posant

$$m = -\frac{T}{R}, \qquad n = \frac{T^2 R}{R^2 + T^2},$$

on en déduira

$$(4) \qquad R = n\left(1 - \frac{1}{m^2}\right), \qquad T = n - m\left(1 - \frac{1}{m^2}\right).$$

Ce sont les équations intrinsèques de la courbe; donc, à des formes données de m et n ne correspondra qu'une courbe unique; mais, si l'on pose $s = \varphi(s')$, les équations

$$\zeta = m'\xi, \qquad \eta = n',$$

dans lesquelles se transformeront (3) n'en représenteront pas moins le conoïde, tandis que la courbe (3) sera modifiée.

XVIII. — Des normalies.

Les normalies, comme nous l'avons déjà dit, sont des surfaces gauches qui ont pour génératrices les normales d'une surface donnée menées tout le long d'une courbe tracée sur cette surface. Toute surface gauche peut être considérée, et cela d'une infinité de manières, comme une normalie; mais il est intéressant de considérer les surfaces gauches sous ce nouvel aspect.

Considérons donc une courbe quelconque tracée par le point M sur une surface S. Soient toujours $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale; ρ le rayon de courbure; T le rayon de torsion; ds l'élément d'arc; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface ou de la génératrice de la normalie; x, y, z les coordonnées du point M.

Les équations de la normalie seront

$$X = x + \lambda\alpha, \qquad Y = y + \lambda\beta, \qquad Z = z + \lambda\gamma.$$

Soient $d\varphi$ l'angle de deux génératrices de la normalie infi-

niment voisines, et θ l'angle que fait le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface. On a

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \sin\theta,$$
$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \cos\theta;$$

on en conclut

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha = a'\sin\theta + a''\cos\theta, \\ \beta = b'\sin\theta + b''\cos\theta, \\ \gamma = c'\sin\theta + c''\cos\theta. \end{cases}$$

Soient δ la plus courte distance de deux génératrices voisines, u, v, w les cosinus directeurs de cette droite δ, on aura

$$u = \frac{\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta}{d\varphi}, \qquad v = \frac{\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma}{d\varphi}, \qquad w = \frac{\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha}{d\varphi};$$

si alors on appelle ω l'angle que la droite δ fait avec la tangente à la courbe proposée, on aura

$$\cos\omega = au + bv + cw = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix} \frac{1}{d\varphi}.$$

On conclut de là, en appelant $\frac{1}{g}$ la torsion géodésique de la courbe proposée,

$$(2) \qquad \cos\omega = \frac{1}{g}\frac{ds}{d\varphi};$$

mais on en conclut aussi

$$\cos^2\omega = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sum a\,d\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sum a\,d\alpha & 0 & \sum d\varphi^2 \end{vmatrix} \frac{1}{d\varphi^2}$$

ou

$$\cos^2\omega = \frac{d\varphi^2 - \left(\sum a\,d\alpha\right)^2}{d\varphi^2}$$

ou

$$\sin^2\omega = \frac{\left(\sum a\,d\alpha\right)^2}{d\varphi^2};$$

mais

$$\sum a\,d\alpha = \sum d a\,\alpha - \sum \alpha\,da = -\sum \frac{\alpha a'}{\rho}\,ds = -\frac{\sin\theta}{\rho}\,ds;$$

donc

$$\sin^2\omega = \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2$$

ou

$$(3) \qquad \sin\omega = \frac{1}{\rho_N}\frac{ds}{d\varphi},$$

$\frac{1}{\rho_N}$ désignant la courbure normale; les formules (2) et (3) montrent que la torsion géodésique et la courbure normale ont pour résultante la quantité $\frac{ds}{d\varphi}$, qui est aussi une sorte de courbure.

L'angle ω est aussi l'angle que le plan tangent à la surface gauche en M fait avec le plan central, en sorte que Λ, désignant la distance du point x, y, z au point central, on a

$$(4) \qquad \Lambda = k\,\operatorname{tang}\omega;$$

on a d'ailleurs

$$\Lambda = \sum \frac{\alpha' a'}{\varphi'^2} = \frac{\sum \alpha' a}{\varphi'^2} = \frac{1}{\varphi'^2}\left(\frac{d}{ds}\sum a\alpha - \sum \alpha\frac{a'}{\rho}\right)$$

ou

$$\Lambda = -\frac{\sin\theta}{\rho\varphi'^2}$$

ou

$$\Lambda = -\frac{1}{\rho_N}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{ds}{d\varphi}\sin\omega.$$

On a aussi, en vertu de (4),

$$k = \frac{ds}{d\varphi}\cos\omega;$$

ainsi

$$(5)\qquad \begin{cases} \Lambda = \dfrac{ds}{d\varphi}\sin\omega, \\ k = \dfrac{ds}{d\varphi}\cos\omega; \end{cases}$$

$\frac{1}{\Lambda}$ et $\frac{1}{k}$ ont donc aussi pour résultante la courbure $\frac{d\varphi}{ds}$.

EXERCICES ET NOTES.

1. Toute surface gauche ayant une série de lignes de courbure dans des plans parallèles est un hyperboloïde de révolution.

(Paul Serret, *Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure.*)

2. L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface gauche dans laquelle les lignes de courbure coupent les génératrices sous un angle constant. (*Id.*)

3. Si, sur une surface gauche, on prend pour lignes coordonnées les génératrices et leurs trajectoires orthogonales, on aura

$$\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2},$$

$d\varphi$ désignant l'angle de deux génératrices voisines, $d\mu$ l'arc de trajectoire, $\frac{1}{r}$ sa courbure géodésique, $\frac{1}{r'}$ sa torsion géodésique.

(O. Bonnet, *Journal de l'École Polytechnique,* 35ᵉ Cahier.)

4. La formule $\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{di}{d\mu}$, démontrée (p. 254), prouve que : 1° Si une ligne géodésique est ligne de striction, elle coupe les génératrices sous un angle constant; 2° si une ligne géodésique coupe les génératrices sous un angle constant, elle est ligne de striction; 3° si une ligne de striction coupe les génératrices sous un angle constant, elle est géodésique. (O. Bonnet, *id.*)

5. Si une surface gauche a pour directrices trois courbes des degrés m_1, m_2, m_3, elle est du degré $2m_1m_2m_3$.

6. Si deux surfaces gauches A, B sont telles que tout le long d'une génératrice commune elles se coupent à angle droit, le plan

central de A touche B au même point que le plan central de B touche A. (MANNHEIM.)

7. Si une surface algébrique contient m génératrices d'un même système d'une surface du second ordre, elle contient aussi m génératrices de l'autre système.

(MOUTARD, *voir* PONCELET, *Propriétés projectives*, ...).

8. On appelle *surface réciproque* d'une surface gauche la surface gauche qui a pour génératrices les plus courtes distances de deux génératrices voisines. — Prouver que, si B est la surface réciproque de A, A sera la réciproque de B. — Deux surfaces réciproques n'ont pas nécessairement la même ligne de striction.

9. Tout plan mené par une génératrice d'une surface gauche est tangent en un point T et normal en un point N; il existe sur la génératrice un point O, tel que ON.OT = const.

(CHASLES.)

10. Toute surface gauche du troisième degré contient, outre ses génératrices, deux directrices rectilignes dont l'une est double.

CHAPITRE VI.

LA GÉOMÉTRIE DES LIGNES DROITES.

I. — Les complexes.

Une ligne droite est définie par quatre paramètres, puisque ses équations sous leur forme la plus simple sont

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta;$$

mais on peut remplacer les paramètres a, α, b, β par six autres paramètres, pourvu que l'on ne considère que leurs rapports, et qu'ils soient liés entre eux par une relation. Voici comment nous choisirons ces six nouveaux paramètres que nous appellerons les *coordonnées* de la droite en question.

Soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées de deux points de la droite; nos six coordonnées homogènes seront

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z' \quad \text{et} \quad yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx';$$

elles sont liées entre elles par la relation identique

$$(x - x')(yz' - zy') + (y - y')(zx' - xz') + (z - z')(xy' - yx') = 0.$$

Indépendamment de ces six coordonnées cartésiennes, on peut aussi considérer six coordonnées tangentielles. Soient ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' les coordonnées tangentielles de deux plans passant par la droite;

$$\xi - \xi', \quad \eta - \eta', \quad \zeta - \zeta', \quad \eta\zeta' - \zeta\eta', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta', \quad \xi\eta' - \eta\xi'$$

seront les coordonnées tangentielles de la droite; elles se

réduisent à quatre par la même méthode que pour les coordonnées cartésiennes.

Ceci posé, soit

$$(1)\quad F(x-x', y-y', z-z', yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')=0$$

une équation homogène du degré m entre les coordonnées d'une droite ; les équations de cette droite renfermeront trois paramètres variables et définiront une infinité de droites formant alors ce que l'on appelle un *complexe;* (1) est l'équation cartésienne du complexe. Un complexe est d'ordre m quand son équation est d'ordre m.

En établissant entre les coordonnées tangentielles d'une droite une relation homogène, on définit également un complexe. Nous allons montrer tout d'abord comment on peut passer de l'équation cartésienne à l'équation tangentielle d'un complexe.

On a évidemment

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} x\xi+y\eta+z\zeta&=1,\\ x'\xi+y'\eta+z'\zeta&=1,\\ x\xi'+y\eta'+z\zeta'&=1,\\ x'\xi'+y'\eta'+z'\zeta'&=1,\end{aligned}\right.$$

car les plans qui passent par la droite joignant x, y, z à x', y', z' contiennent ces points ; on en tire

$$\begin{aligned}(x-x')\xi+(y-y')\eta+(z-z')\zeta&=0,\\ (x-x')\xi'+(y-y')\eta'+(z-z')\zeta'&=0:\end{aligned}$$

donc

$$(2)\quad \frac{x-x'}{\eta\zeta'-\zeta\eta'}=\frac{y-y'}{\zeta\xi'-\xi\zeta'}=\frac{z-z'}{\xi\eta'-\eta\xi'},$$

de même

$$(3)\quad \frac{\xi-\xi'}{yz'-zy'}=\frac{\eta-\eta'}{zx'-xz'}=\frac{\zeta-\zeta'}{xy'-yx'}.$$

Mais si entre les formules (A) on élimine x et x', on trouve

$$\begin{aligned}y(\eta\xi'-\xi\eta')+z(\zeta\xi'-\xi\zeta')&=\xi'-\xi,\\ y'(\eta\xi'-\xi\eta')+z'(\zeta\xi'-\xi\zeta')&=\xi'-\xi;\end{aligned}$$

on en tire, par exemple, par l'élimination de $\zeta\xi' - \xi\zeta'$,

$$(\eta\xi' - \xi\eta')(yz' - zy') = (\xi' - \xi)(z' - z)$$

ou

$$\frac{\eta\xi' - \xi\eta'}{z - z'} = \frac{\xi - \xi'}{yz' - zy'}.$$

Les formules (2) et (3) peuvent donc se ramener aux suivantes :

$$(4)\quad \frac{x - x'}{\eta\zeta' - \zeta\eta'} = \frac{y - y'}{\zeta\xi' - \xi\zeta'} = \frac{z - z'}{\xi\eta' - \eta\xi'} = \frac{yz' - zy'}{\xi' - \xi} = \frac{zx' - xz'}{\eta' - \eta} = \frac{xy' - yx'}{\zeta' - \zeta};$$

l'équation (1), convertie en coordonnées tangentielles, sera donc

$$(1\ bis)\quad F(\eta\zeta' - \zeta\eta', \zeta\xi' - \xi\zeta', \xi\eta' - \eta\xi', \xi' - \xi, \eta' - \eta, \zeta' - \zeta) = 0,$$

et son degré restera ce qu'il était.

Si dans l'équation (1) on suppose x', y', z' constants, elle représentera un cône de degré m ayant son sommet en x', y', z', car (1) est homogène en $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ (puisque $yz' - zy' = \overline{y - y'}z' - \overline{z - z'}y'$). De même, si dans (1 *bis*) on suppose ξ', η', ζ' constants, cette équation représentera une enveloppe de droites situées dans un même plan, ou, si l'on préfère, une courbe plane de $m^{\text{ième}}$ classe.

Ainsi les droites d'un complexe peuvent être groupées de deux manières : 1° de manière à donner des cônes du degré m tels que chacun des points de l'espace soit le sommet de l'un de ces cônes, 2° de manière à donner des droites enveloppant des courbes planes de $m^{\text{ième}}$ classe, telles que chaque plan de l'espace contienne une de ces courbes.

II. — Des congruences ou des faisceaux.

Les droites communes à deux complexes forment ce que l'on appelle un *faisceau* ou une *congruence;* un faisceau sera donc représenté par deux équations représentant chacune un complexe.

Le degré ou la classe d'un faisceau est le produit des degrés

des équations des complexes dont il fait partie. Voici la raison de cette définition : soient

$$\Omega_m = 0, \qquad \Omega_n = 0$$

les équations de deux complexes de degrés m et n. Au point x', y', z' passent deux cônes de degrés m et n, qui se coupent suivant $p = mn$ droites appartenant au faisceau ; ce sont d'ailleurs les seules droites du faisceau passant en $x' y' z'$. Ainsi les droites d'un faisceau peuvent être distribuées :

1° En groupes d'un nombre p fini de droites passant par chaque point de l'espace ;

2° En groupes de p droites situées dans chaque plan de l'espace.

Avant d'étudier les complexes et les faisceaux en général, il convient d'étudier les complexes du premier degré et les faisceaux auxquels ils donnent lieu par leurs intersections, faisceaux qui sont du premier degré ou de la première classe.

III. — Complexes du premier degré.

Les équations d'un complexe du premier degré sont

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') \\ & \quad + D(yz' - zy') + E(zx' - xz') + F(xy' - yx') = 0 \end{aligned} \right.$$

ou

$$(1 \textit{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} & A(\eta\zeta' - \zeta\eta') + B(\zeta\xi' - \xi\zeta') + C(\xi\eta' - \eta\xi') \\ & \quad + D(\zeta' - \xi) + E(\eta' - \eta) + F(\zeta' - \zeta) = 0 ; \end{aligned} \right.$$

le cône des droites qui passent par chaque point de l'espace est un plan, et la courbe à laquelle sont tangentes les droites passant dans un même plan se réduit à un point. Dans un complexe du premier degré, chaque point de l'espace correspond donc à un certain plan et *vice versa ;* nous dirons que le point et le plan qui se correspondent sont conjugués.

Si nous considérons deux points a et b et leurs plans correspondants, ces plans se couperont suivant une droite AB ; or

aA et aB sont des droites du complexe, ainsi que bA et bB : donc le plan aAb correspond au point A, et le plan aBb au point B; ces plans se coupent suivant la droite ab.

On voit ainsi qu'à une droite ab en correspond une autre AB; ces deux droites sont dites *conjuguées*.

Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées appartient au complexe; en effet, par cette droite et l'une des droites conjuguées A on peut faire passer un plan, qui sera le plan conjugué du point où la droite rencontrera la conjuguée de A; or toutes les droites de ce plan appartiennent au complexe.

Deux droites conjuguées n'appartiennent jamais au complexe, à moins d'être confondues. D'ailleurs toute conjuguée d'une droite du complexe se confond avec elle; en effet, pour trouver la conjuguée d'une droite, il faut construire l'intersection de deux plans conjugués de deux points de la droite; or ici ces deux plans contiennent la droite. Donc, etc.

IV. — Diamètres et axe d'un complexe du premier degré.

On appelle *diamètre* d'un complexe du premier degré le lieu des points conjugués d'une série de plans parallèles.

Si dans l'équation

$$A(x-x')+B(y-y')+\ldots+D(yz'-zy')+\ldots=0$$

du complexe on suppose à x', y', z' des valeurs déterminées, cette équation sera celle du plan conjugué; ses coefficients directeurs sont

$$\begin{aligned}&A-Ez'+Fy',\\&B-Fx'+Dz',\\&C-Dy'+Ex',\end{aligned}$$

et si l'on égale leurs rapports à des constantes, on voit que le point x', y', z' décrira une droite; ainsi les diamètres sont des droites, les conjuguées des diamètres sont à l'infini et à l'intersection des plans conjugués de leurs divers points; on voit aussi que tous les diamètres sont parallèles.

Les équations d'un diamètre sont

$$\frac{A - Ez' + Fy'}{a} = \frac{B - Fx' + Dz'}{b} = \frac{C - Dy' + Ex'}{c},$$

et l'on déduit de là, en supprimant les termes constants,

$$\frac{x'}{D} = \frac{y'}{E} = \frac{z'}{F}.$$

D, E, F sont les coefficients directeurs de tous les diamètres. Pour qu'un plan soit perpendiculaire à son diamètre conjugué, il faut que

$$(1) \qquad \frac{A - Ez' + Fy'}{D} = \frac{B - Fx' + Dz'}{E} = \frac{C - Dy' + Ex'}{F};$$

ce sont les équations de l'axe.

Prenons l'axe du complexe pour axe des z, les équations précédentes seront satisfaites pour $x' = 0$, $y' = 0$; donc $E = 0$, $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$, et l'on peut mettre l'équation du complexe sous la forme

$$k(z - z') = (xy' - yx'),$$

qui ne change pas quand on fait tourner les axes autour de l'axe des z ou quand on les fait glisser le long de cet axe. k est le *paramètre* du complexe et le plan des xy est une *section principale*.

Calculons le paramètre k; à cet effet, transformons les coordonnées en plaçant l'origine sur l'axe et en prenant l'axe du complexe pour axe des z; D, E, F sont les coefficients directeurs de l'axe. Cherchons l'intersection de l'axe avec son plan conjugué

$$Dx' + Ey' + Fz' = 0;$$

les équations (1), combinées avec celle-ci, donnent

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

d'où l'on tire les coordonnées d'un point de l'axe

$$(2) \qquad \frac{x'}{BF - CE} = \frac{y'}{CD - AF} = \frac{z'}{AE - BD} = \theta;$$

les équations (1) donnent

$$\frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2} = \frac{A - Ez' + Fy'}{D} = \ldots.$$

En tenant compte de (2), on a

$$\frac{(AD + BE + CF)D - A(D^2 + E^2 + F^2)}{D^2 + E^2 + F^2}$$
$$= [F(CD - AF) - E(AE - BD)]\theta$$

ou

$$\theta = \frac{1}{D^2 + E^2 + F^2};$$

donc (2) donne

$$x' = \frac{BF - CE}{D^2 + E^2 + F^2}, \qquad y' = \frac{CD - AF}{D^2 + E^2 + F^2}, \qquad z' = \ldots;$$

nous appèllerons ces valeurs x_0, y_0, z_0.

Le transport de l'origine en x_0, y_0, z_0 donnera à l'équation du complexe la forme

$$\left.\begin{array}{l} A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') \\ \quad + D(yz' - zy') + E(zx' - xz') + F(xy' - yx') \\ \quad + D[-y_0(z - z') + z_0(y - y')] + \ldots \end{array}\right\} = 0$$

ou

$$(x - x')(A - Ez_0 + Fy_0) + \ldots + D(yz' - zy') + \ldots = 0$$

ou

$$\frac{AD + BE + FC}{D^2 + E^2 + F^2}[D(x - x') + E(y - y') + F(z - z')]$$
$$+ D(yz' - zy') + \ldots = 0.$$

Prenons maintenant pour axe des z l'axe du complexe. Il faudra effectuer la transformation

$$\begin{array}{ll} x = ax_1 + by_1 + cz_1, & x' = ax'_1 + \ldots, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, & y' = a'x'_1 + \ldots, \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, & z' = a''x'_1 + \ldots, \end{array}$$

où c, c', c'' sont égaux à

$$\frac{D}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}}, \quad \frac{E}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}}, \quad \frac{F}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}}.$$

On a

$$\begin{aligned} yz' - zy' = & \quad (x_1 y'_1 - y_1 x'_1)(a'b'' - b'a'') \\ & + (y_1 z'_1 - z_1 y'_1)(b'c'' - c'b'') \\ & + (z_1 x'_1 - x_1 z'_1)(c'a'' - a'c''); \end{aligned}$$

le coefficient de $y_1 z'_1 - y'_1 z_1$ dans la formule transformée sera alors

$$D(b'c'' - c'b'') + E(b''c - c''b) + F(bc' - cb')$$

ou

$$\begin{vmatrix} D & E & F \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

ou encore

$$Da + Ea' + Fa'' = 0;$$

celui de $xy' - yx'$ sera

$$Dc + Ec' + Fc'' \quad \text{ou} \quad \frac{D^2 + E^2 + F^2}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}},$$

ou enfin

$$\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Le nouveau coefficient de $z - z'$ sera

$$(Dc + Ec' + Fc'') \quad \text{ou encore} \quad \sqrt{D^2 + E^2 + F^2};$$

donc enfin la transformation de coordonnées conduit à la formule

$$(AD + BE + CF)(z - z') \pm (D^2 + E^2 + F^2)(xy' - yx') = 0.$$

La valeur du paramètre k est donc

$$k = \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

V. — Classification des complexes du premier degré.

L'interprétation du coefficient k, que nous avons appelé *paramètre*, se fait ainsi : on a

(1) $$xy' - yx' = k(z - z');$$

soit

$$\frac{X-x}{x-x'}=\frac{Y-y}{y-y'}=\frac{Z-z}{z-z'}$$

les équations d'une droite du complexe; sa distance δ à l'axe est donnée par la formule suivante, où l est la distance de deux points x, y, z, x', y', z',

$$\delta=\frac{1}{l}(xy'-yx'),$$

d'où l'on tire, en vertu de (1),

$$\delta=k\frac{z-z'}{l}=k\cos\gamma,$$

γ désignant l'angle que fait la droite avec l'axe. On voit que, si δ reste constant, γ reste constant, et, par suite, les droites du complexe sont les tangentes à une infinité d'hélices ayant pour axes l'axe du complexe. Ces hélices seront *sinistrorsum* ou *dextrorsum* suivant que $k \gtrless 0$. *Si k était nul, δ serait toujours nul, et les droites du complexe rencontreraient toutes l'axe.*

Ainsi les conditions pour que $k=0$, ou pour que toutes les droites d'un complexe rencontrent leur axe, sera

$$k=0 \quad \text{ou} \quad AD+BE+CF=0,$$

d'après la valeur trouvée pour k au numéro précédent.

VI. — Congruences du premier degré.

L'équation des complexes du premier degré contient cinq paramètres que l'on peut déterminer en se donnant les coordonnées de cinq droites du complexe. Le problème ne peut devenir indéterminé que si les cinq droites données font partie d'une congruence. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, le problème sera bien déterminé.

Ceci posé, en appelant $\Omega=0$, $\Omega'=0$ les équations de deux complexes, $\Omega+\lambda\Omega'=0$ sera l'équation générale des

complexes contenant la congruence $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$; en effet, ce complexe sera déterminé par quatre droites de la congruence et une cinquième droite que l'on se donnera en dehors.

Ceci posé, on peut toujours choisir λ de telle sorte que $\Omega + \lambda\Omega' = 0$ ait un paramètre nul; si l'on a

$$\Omega = A(x - x') + \ldots + D(yz' - zy') + \ldots,$$
$$\Omega' = A'(x - x') + \ldots + D'(yz' - zy') + \ldots,$$

on aura

$$(A + \lambda A')(D + \lambda D') + (B + \lambda B)(E + \lambda E') + (C + \lambda C')(F + \lambda F') = 0,$$

équation d'où l'on tirera deux valeurs pour λ, à moins que l'un des complexes Ω, Ω' ne se réduise déjà à un complexe avec un paramètre nul.

Il résulte de là que, une congruence du premier degré étant donnée, on peut toujours la considérer comme appartenant à deux complexes de paramètres nuls. Les droites communes à de tels complexes sont assujetties à rencontrer deux droites fixes, à savoir les axes de ces complexes. Ainsi :

Toute congruence du premier degré se compose des droites rencontrant deux droites fixes.

VII. — Complexes du second degré.

Un complexe du second degré peut être représenté par une équation homogène et du second degré en

$$X = x - x', \qquad Y = y - y', \qquad Z = z - z',$$
$$l = yz' - zy', \qquad m = zx' - xz', \qquad n = xy' - yx',$$

que nous pourrons mettre sous la forme

$$(1) \qquad F(l, m, n) + 2Ll + 2Mm + 2Nn + \Theta(X, Y, Z) = 0.$$

F est une fonction homogène et du second degré de l, m, n. Θ est une fonction homogène du second degré de X, Y, Z,

enfin L, M, N sont des fonctions linéaires de X, Y, Z homogènes.

Si l'on suppose x', y', z' constants dans l'équation (1), elle représentera un cône du second degré ayant son sommet en x', y', z', formé de toutes les droites du complexe passant en x', y', z'; exprimons que le cône se réduit à un système de deux plans; le lieu des points x', y', z' pour lesquels cette circonstance se présente est ce que l'on appelle une *surface de Kummer*.

La surface de Kummer pour le complexe (1) s'obtiendra en exprimant que (1) est une somme de deux carrés, fonctions linéaires de X, Y, Z.

A cet effet, décomposons en carrés le premier membre de (1), et, pour faciliter le travail, effectuons d'abord un changement de coordonnées sans déplacer l'origine. Supposons les coordonnées anciennes et nouvelles orthogonales : il est facile de s'assurer que x, y, z, x', y', z', X, Y, Z et l, m, n sont transformées par la même substitution, en sorte que l'on peut supposer $F(l, m, n)$ de la forme $A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2$ et écrire l'équation (1) ainsi

$$(2)\quad A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 + 2ALl + 2BMm + 2CNn + \theta(X, Y, Z),$$

A, B, C désignant des constantes et L, M, N des fonctions linéaires de X, Y, Z. Cette dernière équation peut encore s'écrire

$$(3)\qquad (Al + L)^2 + (Bm + M)^2 + (Cn + N)^2 + \Omega(X, Y, Z),$$

Ω désignant une nouvelle fonction homogène et du second degré de X, Y, Z. Il s'agit maintenant d'exprimer que cette fonction est une somme de deux carrés ou d'écrire que son discriminant est nul; cela ne présente aucune difficulté, les termes de la fonction (1) ou (3) étant du second degré en x', y', z', et le discriminant étant du troisième degré par rapport aux coefficients de cette fonction. La surface de Kummer sera, en apparence au moins, du sixième degré; mais on peut s'assurer que les termes du cinquième et du sixième degré

sont nuls; et, en effet, les termes sont indépendants de la forme de la fonction Ω qui ne contient pas x', y', z'. Pour évaluer les termes en question, on peut donc supposer $\Omega = 0$ et se borner à considérer l'expression (3) réduite à

$$(Al + L)^2 + (Bm + M)^2 + (Cn + N)^2;$$

alors son discriminant, étant 1 par rapport aux quantités $Al + L$, $Bm + M$, $Cn + N$, sera par rapport à X, Y, Z égal au carré du déterminant de la substitution

$$x = Al + L, \qquad y = Bm + M, \qquad z = Cn + N.$$

Si l'on pose $L = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$, $M = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z$, $N = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z$, le discriminant cherché sera le carré de

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta + Az' & \gamma - Ay' \\ \alpha' - Bz' & \beta' & \gamma' + Bx' \\ \alpha'' + Cy' & \beta'' - Cx' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Comme le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & Az' & -Ay' \\ -Bz' & 0 & Bx' \\ Cy' & -Cx' & 0 \end{vmatrix},$$

qui forme l'ensemble des termes du troisième degré, est nul, il faut en conclure que le déterminant (4) est du deuxième degré et que son carré est du quatrième; donc

La surface de Kummer est du quatrième degré.

Cherchons enfin les points x', y', z' pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents. L'expression (1) devra alors être un carré parfait; l'équation de la surface de Kummer peut se mettre sous la forme

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta = 0.$$

En appelant

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY$$

le premier membre de l'équation du complexe (1), les éléments A, B, ... sont du second degré en x', y', z', et les points où le cône se réduit à un plan double sont donnés par les formules

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial B} = 0, \quad \ldots,$$

qui se réduisent à deux équations distinctes du quatrième degré en x', y', z'; ces équations ont, par suite, 16 solutions, et il existe 16 points pour lesquels le cône du complexe se réduit à un plan double. Prenons l'un de ces points pour origine, on a (t. I, p. 161)

$$\Delta A'' = \frac{\partial\Delta}{\partial A}\frac{\partial\Delta}{\partial A'} - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)^2;$$

cette formule montre que les termes du degré le moins élevé en x', y', z' dans Δ sont du second degré, puisqu'ils sont du premier degré au moins dans les dérivées $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, ...; donc les 16 points en question sont des points singuliers de la surface de Kummer. Ainsi :

La surface de Kummer a 16 *points singuliers qui sont les points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans confondus.*

La transformation par polaires réciproques montre, en outre, que :

La surface de Kummer est de quatrième classe; elle a 16 *plans tangents singuliers; elle est l'enveloppe des plans pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points.*

L'équation qui fournit les points singuliers de la surface de Kummer est résoluble par radicaux (*voir* Jordan, *Théorie*

des substitutions, p. 313). *Voir*, pour plus de détails, Plücker (*Neue Geometrie des Raumes*) (c'est dans cet Ouvrage que nous avons puisé les théories précédentes), et Kummer (*Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, 1864).

VIII. — Des congruences en général. — Foyers.

Considérons les équations

$$(1)\qquad X = x + \lambda\alpha,\qquad Y = y + \lambda\beta,\qquad Z = z + \lambda\gamma,$$

et supposons que $x, y, z, \lambda, \alpha, \beta, \gamma$ soient fonctions de deux paramètres variables μ, ν, X, Y, Z désignant les coordonnées courantes, x, y, z les coordonnées d'un point variable et α, β, γ trois cosinus directeurs; ces équations représenteront une droite variable, ou, si l'on veut, la *congruence* formée de toutes les droites représentées par (1).

Soient D une droite de la congruence; δ la plus courte distance de D et d'une droite infiniment voisine D'; Δ une droite perpendiculaire à D et δ; q la distance du point x, y, z par lequel nous supposerons que passe D, au pied de la perpendiculaire commune à D et D'. Les formules du § 1 du Chapitre précédent donneront, en supposant les droites D et D' infiniment voisines,

$$(2)\qquad \delta = \frac{dx(\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta) + dy(\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma) + dz(\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha)}{dV},$$

$$(3)\qquad dV^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2;$$

les cosinus directeurs des droites

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{D sont } \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ \delta \text{ sont } \dfrac{\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta}{dV},\ \dfrac{\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma}{dV},\ \dfrac{\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha}{dV}, \\ \Delta \text{ sont } \dfrac{d\alpha}{dV},\ \dfrac{d\beta}{dV},\ \dfrac{d\gamma}{dV}; \end{cases}$$

le λ du point où δ rencontre D est donné par la formule

$$(5) \qquad \Lambda = \frac{dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma}{dV^2}.$$

Ces formules étant établies, nous allons voir que :

Il existe deux points appelés foyers *sur* D, *où* D *est rencontrée par une droite* D′ *infiniment voisine.*

Pour mettre ces points en évidence, il suffit, dans la formule (2), de supposer $\delta = 0$, ce qui donne

$$(6) \quad dx(\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta) + dy(\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma) + dz(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha) = 0.$$

Cette équation est du deuxième degré en $d\nu$ et $d\mu$ ou plutôt en $\frac{d\nu}{d\mu}$; elle fera connaître deux valeurs de ce rapport et par suite deux valeurs de Λ au moyen de la formule (5), ce qui met en évidence l'existence des foyers.

L'équation (6) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

En élevant cette équation au carré et en tenant compte de (5), on trouve

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \sum \alpha\,dx \\ 0, & dV^2, & \Lambda\,dV^2 \\ \sum \alpha\,dx, & \Lambda\,dV^2, & \sum dx^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\Lambda^2\,dV^2 = \sum dx^2 - \left(\sum \alpha\,dx\right)^2$$

ou enfin

$$(7) \qquad \Lambda = \frac{\sqrt{\sum (\beta\,dz - \gamma\,dy)^2}}{dV}.$$

L'équation (6) exprime que la droite D rencontre une droite infiniment voisine; c'est une équation différentielle en ν et μ qui détermine ν en fonction de μ et d'une constante arbitraire c. Si l'on porte cette valeur dans (1), ces équations ne dépendront plus que de μ et de c; quand on donnera à c une valeur déterminée, les droites (1) engendreront une développable. Les développables qui forment un système double [puisque l'équation (6) est du deuxième degré] que l'on obtient en faisant varier c sont ce que l'on appelle les *développables* du faisceau.

Ainsi :

Les droites d'une congruence forment deux séries de développables, touchées par les droites de la congruence en leurs foyers.

Le lieu des foyers ou des arêtes des développables est une surface à deux nappes que l'on appelle la *surface focale*.

La surface focale est touchée en deux points par chaque droite de la congruence; on obtiendra son équation en remplaçant λ dans (1) par la valeur (7) de Λ et en éliminant ensuite λ, μ et ν entre les équations.

La surface focale pourra se composer soit de deux surfaces distinctes, soit de deux nappes appartenant à une même surface. Les développables ne sont pas, en général, tangentes aux focales; mais, quand cela a lieu, leurs arêtes de rebroussement sont des asymptotiques des focales, car leurs plans osculateurs sont tangents aux focales.

Les *plans focaux* d'une congruence sont les plans tangents aux développables du faisceau. Il en passe deux par chaque génératrice; ils sont osculateurs aux arêtes de rebroussement des développables.

Pour trouver les plans focaux qui passent par la droite (1), nous observerons que, les plans devant passer par x, y, z, leurs équations seront de la forme

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0;$$

un plan focal étant parallèle aux directions α, β, γ et $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$, on devra avoir

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= 0, \\ A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma &= 0, \end{aligned}$$

et, par suite, un plan focal aura pour équation

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = (X - x)(\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta) + (Y - y)(\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma) \\ + (Z - z)(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha), \end{aligned} \right.$$

et d'ailleurs la droite qui a pour coefficients directeurs $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ doit rencontrer (1); pour cette droite on doit donc avoir $\delta = 0$, ou

$$(6) \quad dx(\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta) + dy(\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma) + dz(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha) = 0;$$

cette équation détermine $\frac{d\mu}{d\nu}$ et, par suite, l'équation (8). Comme $\frac{d\mu}{d\nu}$ a deux valeurs, l'équation (8) fournira bien les deux plans focaux.

D'après ce qui précède, on voit qu'*une congruence se compose de toutes les droites tangentes à deux surfaces dites focales*. Réciproquement, *les tangentes communes à deux surfaces engendrent une congruence, et ces deux surfaces peuvent être choisies arbitrairement.*

Les tangentes à un faisceau de courbes tracées sur une surface engendrent aussi une congruence, de même que toutes les droites d'une congruence sont tangentes à des courbes qui sont les arêtes de rebroussement des développables de la congruence, toutes situées sur la surface focale et formant un réseau sur cette surface.

Si l'on considère les arêtes de rebroussement d'une série de développables d'une congruence, ces courbes sont conjuguées, sur la focale qui les contient, des traces des développables de l'autre série sur la même focale.

En effet, soit $\mu =$ const. l'équation des arêtes de rebrous-

sement de la première série de développables, sur la focale qui est leur lieu, $\nu = \text{const.}$ l'équation des traces de l'autre série de développables sur la même focale. Prenons μ et ν pour variables, les équations de la congruence seront

$$X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial \nu}, \qquad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial \nu}, \qquad Z = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu}.$$

Si l'on écrit que cette droite rencontre la droite infiniment voisine représentée par les équations

$$X = x + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \nu} d\mu + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial \nu} d\mu, \qquad \dots,$$

on aura

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial \nu} & \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial \nu} & \frac{\partial^2 z}{\partial \mu \partial \nu} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime bien que $\mu = \text{const.}$ et $\nu = \text{const.}$ sont des courbes conjuguées.

IX. — Points principaux. — Point moyen.

Nous pouvons regarder x, y, z comme fonctions de α, β, γ, ces dernières variables étant reliées par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

la quantité Λ qui mesure la distance du point x, y, z à la droite (1) est donnée par la formule

$$\Lambda = \frac{d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz}{dV^2}$$

ou bien

$$\Lambda = \frac{\sum d\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma \right)}{dV^2},$$

c'est-à-dire

$$\Lambda = \frac{d\alpha^2 \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + d\beta\, d\gamma \left(\dfrac{\partial y}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial z}{\partial \beta} \right) + \ldots}{dV^2}.$$

Si nous posons

$$\frac{d\alpha}{dV} = \alpha', \qquad \frac{d\beta}{dV} = \beta', \qquad \frac{d\gamma}{dV} = \gamma',$$

nous aurons

$$(9) \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

$$(10) \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

et

$$(11) \qquad \Lambda = \alpha'^2 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \beta'\gamma' \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) + \ldots.$$

Cherchons le maximum et le minimum de Λ quand on fait varier α', β', γ'; à cet effet, égalons à zéro les dérivées de

$$\tfrac{1}{2} [\Lambda + \rho(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + \sigma(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')],$$

nous aurons

$$(12) \begin{cases} \alpha' \left(\rho + \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + \dfrac{1}{2} \beta' \left(\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} \right) + \dfrac{1}{2} \gamma' \left(\dfrac{\partial x}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} \right) + \dfrac{1}{2} \sigma\alpha = 0, \\ \dfrac{1}{2} \alpha' \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \beta' \left(\rho + \dfrac{\partial y}{\partial \beta} \right) + \dfrac{1}{2} \gamma' \left(\dfrac{\partial y}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial z}{\partial \beta} \right) + \dfrac{1}{2} \sigma\beta = 0, \\ \dfrac{1}{2} \alpha' \left(\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial x}{\partial \gamma} \right) + \dfrac{1}{2} \beta' \left(\dfrac{\partial y}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial z}{\partial \beta} \right) + \gamma' \left(\rho + \dfrac{\partial z}{\partial \gamma} \right) + \dfrac{1}{2} \sigma\gamma = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la première de ces formules par α', la seconde par β', la troisième par γ' et si l'on ajoute, on trouve, en vertu de (9), (10) et (11), $\rho = -\Lambda$; alors l'élimination de

α', β', γ', $\frac{\sigma}{2}$ entre ces équations et (10) donne

$$(13)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \Lambda & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) & \alpha \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\right) & \frac{\partial y}{\partial \beta} - \Lambda & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\right) & \beta \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial \gamma}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \gamma}\right) & \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \Lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On démontre sans peine que cette équation en Λ a deux racines (t. II, p. 437) qui sont réelles, mais qui peuvent être égales, et comme Λ n'est pas généralement infini, on en conclut que la plus courte distance δ d'une génératrice D aux génératrices voisines ne peut se mesurer qu'entre deux points en général distincts et situés à distance finie; ces deux points sont les *points principaux* de la génératrice D. Le lieu de ces points se compose de deux nappes qui forment la *surface principale* de la congruence.

Les points principaux une fois connus, les équations (10) et (12), qui sont du premier degré, fourniront α', β', γ', σ. En vertu des formules (4), α', β', γ' sont les cosinus directeurs des droites Δ perpendiculaires à D et à δ menées par les points principaux. Ces droites sont les normales aux plans passant par D et les plus courtes distances δ extrêmes menées par les points principaux, plans que l'on a appelés *principaux*.

Les plans principaux sont orthogonaux. C'est ce que l'on vérifie bien facilement, en désignant par α'_1, β'_1, γ'_1, Λ_1 les valeurs de α', β', γ', Λ, en l'un des points principaux, ces valeurs étant toujours désignées par α', β', γ', Λ en l'autre; en multipliant alors les équations (12) par α'_1, β'_1, γ'_1, en les ajoutant, puis en permutant les lettres portant l'indice avec celles qui ne le portent pas et retranchant les résultats, on trouve

$$(\alpha'\alpha'_1 + \beta'\beta'_1 + \gamma'\gamma'_1)(\Lambda - \Lambda') = 0,$$

ce qui montre que, si $\Lambda \gtrless \Lambda'$, c'est-à-dire si les points prin-

cipaux ne sont pas confondus, les plans principaux sont rectangulaires. C. Q. F. D.

Nous reviendrons plus loin sur le cas où $\Lambda = \infty$.

On appelle *point moyen* d'une génératrice le milieu de l'intervalle compris entre les points principaux; on appelle *plan moyen* d'une génératrice le plan mené par le point moyen perpendiculairement à cette génératrice. Enfin, on appelle *surface moyenne* et *enveloppée moyenne* d'une congruence le lieu des points moyens et l'enveloppe des plans moyens.

Prenons maintenant pour plans de coordonnées les plans principaux et le plan moyen de la génératrice D, qui sera prise pour axe des z, on aura $x = y = z = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, et, en vertu de $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, on aura $\gamma' = 0$, $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$. Dans les équations (12), ρ est égal à l'une des valeurs de Λ changée de signe. Si donc on appelle $2p$ la distance des points principaux, ρ devra être remplacé par $\pm p$ et les deux premières équations (12) deviendront

$$\alpha'\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \pm p\right) + \frac{1}{2}\beta'\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) + \beta'\left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \pm p\right) = 0;$$

or α', β', γ' sont les coefficients directeurs des plans principaux : donc ces plans principaux ayant été pris pour plans de coordonnées, ces formules doivent être satisfaites pour $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$ et pour $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \pm p, \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta} = \pm p;$$

l'équation (13) devient

$$\Lambda^2 - \Lambda\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0.$$

Λ devant avoir deux valeurs égales et de signes contraires,

$\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta}$ doit être nul; on peut donc poser

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \beta} &= -\frac{\partial y}{\partial \alpha} = q, \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial y}{\partial \beta} = p. \end{aligned}\right.$$

Les équations (5) et (6), qui font connaître les foyers, deviennent alors

$$\Lambda = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial x}{\partial \beta}\beta'\right)\alpha' + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial y}{\partial \beta}\beta'\right)\beta'$$
$$-\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial x}{\partial \beta}\beta'\right)\beta' + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial y}{\partial \beta}\beta'\right)\alpha' = 0$$

ou, en vertu de (14),

$$\Lambda = p\alpha'^2 - p\beta'^2,$$

$$q(\beta'^2 + \alpha'^2) - 2p\alpha'\beta' = 0 \qquad \text{ou} \qquad q - 2p\alpha'\beta' = 0;$$

on tire de là

$$\Lambda = \pm\sqrt{p^2 - q^2}.$$

En appelant alors $2f$ la distance des foyers, on a donc

$$f^2 = p^2 - q^2,$$

et l'on voit que

Les foyers sont à égale distance du point moyen.

Théorème de Sturm. — *Les droites voisines d'une congruence* D *rencontrent deux droites fixes.* (*Comptes rendus,* 1er semestre 1845.)

Ceci doit avoir lieu *a priori,* car toute congruence peut être considérée comme étant du premier degré, quand on fait varier très peu les paramètres dont elle dépend, et l'on a vu que toutes les génératrices d'une congruence du premier degré rencontraient deux droites fixes.

Nous allons vérifier cette conclusion. Les droites voisines de D ont pour équations

$$\frac{X - x - dx}{\alpha + d\alpha} = \frac{Y - y - dy}{\beta + d\beta} = \frac{Z - z - dz}{\gamma + d\gamma},$$

et, si l'on particularise les axes comme tout à l'heure,

$$\frac{X - (p\alpha' + q\beta')dV}{\alpha'} = \frac{Y + (q\alpha' + p\beta')dV}{\beta'} = \frac{Z\,dV}{1}.$$

Si l'on écrit ces équations ainsi

$$X = (\;\;p\alpha' + q\beta' + \alpha' Z)\,dV,$$
$$Y = (-q\alpha' - p\beta' + \beta' Z)\,dV,$$

on voit que la droite représentée par ces équations rencontre la droite

$$(15) \qquad \frac{Y}{X} = \frac{p\alpha' + q\beta' + \alpha' Z_0}{-q\alpha' - p\beta' + \beta' Z_0}, \qquad Z = Z_0,$$

qui sera fixe, si l'on a

$$(16) \qquad \frac{p + Z_0}{-q} = \frac{q}{Z_0 - p}$$

ou

$$Z_0 = \pm\sqrt{p^2 - q^2} = \pm f.$$

Les droites en question se trouvent donc dans des plans parallèles au plan moyen et passent par les foyers. Les coefficients angulaires des projections de ces droites sur le plan moyen sont donnés par la formule (16), où l'on doit remplacer Z_0 par $-f$ et par $+f$. Nous donnerons à ces droites le nom de *droites focales*.

Les droites focales sont contenues dans les plans focaux.

En effet, l'équation (8) montre que les coefficients directeurs des plans focaux sont

$$\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta, \quad \gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma, \quad \alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha$$

ou, dans le système particulier de coordonnées adopté en

dernier lieu, $-\beta'$, α', o; α' et β' étant d'ailleurs liés par la relation (6), qui devient

$$q - 2p\alpha'\beta' = 0$$

et qui donne

$$\alpha' = \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p+q} + \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p-q},$$

$$\beta' = \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p+q} - \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p-q}.$$

Les équations des plans focaux sont donc

$$\frac{Y}{X} = \frac{-q}{p \mp \sqrt{p^2-q^2}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-q^2}}{-q},$$

et, si l'on observe que les deux membres de (16) donnent pour $z_0 = \sqrt{p^2-q^2}$ les coefficients angulaires des droites focales, on voit que ces droites sont contenues dans les plans focaux.

Le produit des deux valeurs précédentes de $\frac{Y}{X}$ est égal à 1; on en conclut que :

Les plans focaux sont également inclinés sur les plans principaux.

On appelle *surface élémentaire* d'une congruence une surface gauche dont toutes les génératrices font partie de la congruence.

Toutes les surfaces élémentaires qui ont une génératrice commune ont deux plans tangents communs qui sont les plans focaux de cette génératrice, car les droites focales sont tangentes à toutes ces surfaces.

X. — Générations singulières.

Les théories exposées ci-dessus tombent en défaut lorsque la génératrice D est telle que l'on puisse avoir $d\nu = 0$, ou

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0.$$

Cette relation ne peut avoir lieu que si $d\alpha = d\beta = d\gamma = 0$, équations qui se réduisent à deux, puisque

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0;$$

ces deux équations sont

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\, d\mu + \frac{\partial\alpha}{\partial\nu}\, d\nu = 0, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial\mu}\, d\mu + \frac{\partial\beta}{\partial\nu}\, d\nu = 0:$$

elles ne peuvent avoir lieu en même temps que si l'on a

$$(1) \qquad \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\mu, \nu)} = 0.$$

Cette équation établit une relation entre μ et ν; les équations de la droite D ne renferment plus qu'un paramètre, et les droites pour lesquelles $d\nu$ peut s'annuler forment une surface. Les droites en question sont les droites *singulières;* leur lieu est la surface *singulière* de la congruence.

Considérons une droite singulière; pour que dV soit nul, il faut que

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\, d\mu + \frac{\partial\alpha}{\partial\nu}\, d\nu = 0,$$

ce qui détermine la situation de la génératrice faisant avec celle-ci l'angle nul. Les foyers sont toujours déterminés par l'équation

$$(2) \qquad \frac{d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \Lambda,$$

en posant

$$dx(\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta) + dy(\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma) + dz(\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha) = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

mais, en vertu de (1), $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ sont proportionnels à $\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\beta}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}$, en sorte que l'équation précédente se réduit à une

équation du premier degré en $d\mu$ et $d\nu$, et à l'équation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} d\nu = 0.$$

La première équation fournit un foyer, la seconde fournit pour A une valeur infinie; donc :

Les droites singulières n'ont qu'un foyer; l'autre foyer est à l'infini.

Lorsque l'on a à la fois $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial \mu} = 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0$, la droite correspondante est encore singulière, mais elle est parallèle à toutes les droites voisines et les deux foyers sont à l'infini.

XI. — Congruences harmoniques.

Une congruence est *harmonique* par rapport à une surface quand ses développables déterminent sur cette surface des sections formant un réseau de lignes conjuguées.

Considérons sur deux surfaces s et s', comme correspondants, les points où les plans tangents sont parallèles; les droites joignant deux points correspondants de deux surfaces s et s' forment une congruence harmonique.

En effet, soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées de deux points correspondants; on peut représenter les deux surfaces par des équations telles que

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \chi(\lambda, \mu), \quad z = \psi(\lambda, \mu),$$
$$x' = \varphi'(\lambda, \mu), \quad y' = \chi'(\lambda, \mu), \quad z' = \psi'(\lambda, \mu).$$

Soient α, β, γ les coefficients directeurs du plan tangent en x, y, z ou en x', y', z'; on doit avoir

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \beta \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} + \gamma \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} = 0, \\ \alpha \dfrac{\partial x'}{\partial \lambda} + \beta \dfrac{\partial y'}{\partial \lambda} + \gamma \dfrac{\partial z'}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

et deux autres équations obtenues en changeant λ en μ. Exprimons que la droite qui joint un point à son correspondant

$$X = x + \rho(x' - x), \qquad Y = y + \rho(y' - y), \qquad Z = z + \rho(z' - z)$$

rencontre la droite voisine menée par les points

$$x + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \quad y + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda, \quad z + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda$$

et

$$x' + \frac{\partial x'}{\partial \lambda} d\lambda, \quad y' + \frac{\partial y'}{\partial \lambda} d\lambda, \quad z' + \frac{\partial z'}{\partial \lambda} d\lambda$$

correspondants sur les lignes coordonnées $\mu =$ const., nous aurons

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x'}{\partial \lambda} & x - x' \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = 0$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x'}{\partial \lambda} & x - x' \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y'}{\partial \lambda} & y - y' \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z'}{\partial \lambda} & z - z' \end{vmatrix} = 0.$$

De (1) on tire

$$(3) \qquad \alpha : \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y'}{\partial \lambda} & \frac{\partial z'}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = \beta : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z'}{\partial \lambda} & \frac{\partial x'}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = \gamma : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x'}{\partial \lambda} & \frac{\partial y'}{\partial \lambda} \end{vmatrix};$$

portant les valeurs de α, β, γ à la place des déterminants qui leur sont proportionnels dans (2), nous aurons

$$(x - x')\alpha + (y - y')\beta + (z - z')\gamma = 0,$$

équation absurde, puisque la normale n'est pas en général perpendiculaire à la droite qui joint les points correspon-

dants. Ceci prouve que les formules (3) n'ont pas lieu; en d'autres termes, que les déterminants qui y figurent sont nuls. Ainsi l'on a

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} : \frac{\partial x'}{\partial\lambda} = \frac{\partial y}{\partial\lambda} : \frac{\partial y'}{\partial\lambda} = \frac{\partial z}{\partial\lambda} : \frac{\partial z'}{\partial\lambda};$$

en appelant u chacun de ces rapports égaux, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = u\,\frac{\partial x'}{\partial\lambda}, \qquad \ldots;$$

on aurait d'une façon analogue

$$\frac{\partial x}{\partial\mu} = v\,\frac{\partial x'}{\partial\mu}, \qquad \ldots.$$

On tire de ces équations, en différentiant par rapport à λ et μ,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = u\,\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{\partial x'}{\partial\lambda}\,\frac{\partial u}{\partial\mu},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = v\,\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{\partial x'}{\partial\mu}\,\frac{\partial v}{\partial\lambda},$$

d'où, par soustraction,

$$(u - v)\,\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{\partial u}{\partial\mu}\,\frac{\partial x'}{\partial\lambda} - \frac{\partial v}{\partial\lambda}\,\frac{\partial x'}{\partial\mu} = 0.$$

Comme $u \gtrless v$, sans quoi x et x', y et y', z et z' ne différeraient que par des constantes, on déduit de cette équation et de ses analogues

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x'}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 y'}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 z'}{\partial\lambda\,\partial\mu} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial\mu} & \dfrac{\partial y'}{\partial\mu} & \dfrac{\partial z'}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial y'}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial z'}{\partial\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui prouve que les développables de la congruence coupent le lieu des points x', y', z' suivant des courbes conjuguées, ce qui démontre le théorème énoncé.

XII. — Du faisceau des normales à une surface.

Un faisceau, contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, n'a pas en général ses droites normales à une même surface. Soient, en effet, α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite du faisceau, x, y, z les coordonnées d'un point de cette droite; s'il existe une surface ayant pour normales les droites du faisceau, on pourra désigner par X, Y, Z les coordonnées du point où la droite que nous considérons rencontre la surface; si l'on appelle alors ρ la distance des points x, y, z et X, Y, Z, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} X = x + \rho\alpha, \\ Y = y + \rho\beta, \\ Z = z + \rho\gamma; \end{cases}$$

on peut supposer que les points x, y, z se trouvant, eux aussi, sur une surface par laquelle on a coupé le faisceau, la position du point x, y, z déterminera chaque droite du faisceau, en sorte que X, Y, Z, x, y, z, ρ, α, β, γ pourront être considérés comme des fonctions de deux variables que nous appellerons λ et μ et qui pourront être, soit x et y, soit deux coordonnées curvilignes quelconques relatives à la surface, lieu des points x, y, z.

Différentions les équations (1), nous aurons

$$(2)\qquad \begin{cases} dX = dx + \rho\, d\alpha + \alpha\, d\rho, \\ dY = dy + \rho\, d\beta + \beta\, d\rho, \\ dZ = dz + \rho\, d\gamma + \gamma\, d\rho; \end{cases}$$

pour que la surface normale *existe* réellement, il faut que l'on ait

$$\alpha\, dX + \beta\, dY + \gamma\, dZ = 0,$$

et cette condition est suffisante. Multiplions alors les formules (2) respectivement par α, β, γ et ajoutons-les, nous

aurons, en observant que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est égal à un,

$$0=\alpha\, dx+\beta\, dy+\gamma\, dz+d\rho$$

ou bien

$$-d\rho=\alpha\, dx+\beta\, dy+\gamma\, dz;$$

si nous posons

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\beta\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\lambda}=\text{G},$$

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial y}{\partial\mu}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\mu}=\text{H},$$

l'équation précédente deviendra

$$-d\rho=\text{G}\, d\lambda+\text{H}\, d\mu,$$

et l'on voit que ρ n'existera, et par suite que X, Y, Z n'existeront que si l'expression $\text{G}\, d\lambda+\text{H}\, d\mu$ est une différentielle exacte.

L'expression précédente ne sera une différentielle exacte que si

$$\frac{\partial\text{G}}{\partial\mu}-\frac{\partial\text{H}}{\partial\lambda}=0,$$

ce que l'on peut écrire

$$(3)\quad \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}-\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial\beta}{\partial\mu}-\frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}+\frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\frac{\partial\gamma}{\partial\lambda}=0.$$

Réciproquement, quand cette équation aura lieu, on pourra calculer ρ à une constante près, et il existera une infinité de surfaces normales au faisceau et *parallèles* entre elles.

Prenons une génératrice du faisceau pour axe des z et faisons $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta$, $z=0$, la relation (3) prendra la forme (p. 299)

$$-\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}=0 \qquad \text{ou} \qquad 2q=0;$$

donc :

1° *Les points principaux et les foyers sont confondus;*

2° *Les plans focaux faisant l'angle φ avec les plans*

principaux, on a $2R \tan \varphi = \infty$, *et, par suite, les plans focaux et les plans principaux sont confondus;*

3° *Donc les plans focaux sont rectangulaires;*

4° *Donc les développables du faisceau sont orthogonales;*

5° *Donc les droites focales sont rectangulaires et situées dans les plans focaux.*

Réciproquement, toutes ces conditions supposent $q = 0$; elles sont donc nécessaires et suffisantes pour que la surface normale existe.

Il résulte de là que les normales à une même surface forment deux systèmes de développables qui découpent la surface suivant des courbes qui ne sont autres que les lignes de courbure. Ces développables sont orthogonales et leurs arêtes de rebroussement forment les surfaces focales du faisceau. Ces surfaces focales sont évidemment les lieux des centres de courbure principaux de la surface, car le point où deux normales infiniment voisines se rencontrent est, ou peut être considéré comme le point de rencontre de deux normales infiniment voisines de la section normale principale.

Enfin les normales à une surface forment une congruence harmonique par rapport à cette surface. Les lieux des centres de courbure principaux sont donc touchés par les normales de la surface.

Il est facile de prouver que les arêtes de rebroussement des normalies développables sont des géodésiques des surfaces, lieux des centres de courbure principaux de la surface proposée. Cela résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Toutes les fois que les tangentes à des courbes tracées sur une surface et formant une famille sont normales à une même surface, ces courbes sont géodésiques.*

En effet, si l'on suppose dans les équations (1) que α, β, γ soient les cosinus directeurs des tangentes aux courbes

$\lambda =$ const. d'une surface sur laquelle on a tracé deux systèmes de lignes coordonnées $\lambda =$ const., $\mu =$ const., les équations (1) pourront s'écrire

$$X = x + \rho \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial x}{\partial \mu}, \qquad \ldots, \tag{4}$$

en employant les notations du Chapitre III. La formule (3), qui exprime que la surface normale existe, prend alors la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2M^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)\frac{\partial M}{\partial \mu} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda\, \partial \mu}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2M^{\frac{3}{2}}}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2\right]\frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\partial R}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right) - \frac{R}{2M^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial M}{\partial \mu} - \frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\partial M}{\partial \lambda} + \frac{1}{2\sqrt{M}}\frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$$

ou

$$\frac{\partial R}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \lambda} - \frac{R}{2M}\frac{\partial M}{\partial \mu} = 0.$$

Cette équation, comme nous l'avons vu (p. 113), exprime précisément que les lignes $\lambda =$ const. sont des lignes géodésiques de la surface auxquelles sont tangentes les droites du faisceau.

Il résulte de cette analyse que l'on peut toujours se donner l'un des lieux des centres de courbure d'une surface; la surface elle-même est indéterminée, ainsi que l'autre lieu de ses centres de courbure. Pour trouver l'une des solutions que comporte cette question, on tracera sur la surface donnée un faisceau de géodésiques; leurs tangentes seront normales à la surface cherchée. Le faisceau de ces tangentes détermine

en même temps l'autre surface des centres de courbure qui est une de ses focales.

Ainsi une surface est déterminée, mais incomplètement, quand on se donne l'un des lieux de ses centres de courbure principaux; mais on ne peut pas se donner *a priori* les deux lieux de ses centres de courbure principaux, parce que les tangentes communes à deux surfaces quelconques ne forment pas nécessairement un faisceau normal à une même surface.

Nous avons vu d'ailleurs que, d'un point quelconque de l'espace, on voyait les surfaces lieux des centres de courbure principaux se couper à angles droits, et cela même prouve une fois de plus que ces surfaces ne sauraient être quelconques (t. II, p. 446).

XIII. — Quelques surfaces élémentaires du faisceau des normales à une surface.

Les surfaces élémentaires du faisceau des normales à une surface qui ont pour directrices les lignes de courbure sont, comme l'on sait, les normalies développables; nous n'avons rien à en dire de nouveau.

Considérons maintenant les surfaces élémentaires ou normalies qui ont pour directrices les asymptotiques; les génératrices d'une de ces normalies sont les binormales d'une ligne asymptotique; or, la plus courte distance de deux binormales à une courbe infiniment voisines est la tangente à cette courbe. Donc *les lignes de striction des normalies qui nous occupent sont précisément les asymptotiques elles-mêmes.*

La ligne de striction de la normalie est une ligne géodésique de cette surface, puisque son plan osculateur lui est normal.

On appelle, d'après Bour, *surface réciproque* d'une surface gauche le lieu des plus courtes distances de deux génératrices infiniment voisines.

Les surfaces réciproques des normalies qui passent par les asymptotiques d'une surface sont développables.

En effet, les plus courtes distances en question sont les tangentes aux asymptotiques.

Réciproquement, *si la surface réciproque d'une surface gauche est développable, la ligne de striction de cette surface sera une asymptotique.*

En effet, la ligne de striction sera l'arête de rebroussement de la surface réciproque, et son plan osculateur sera tangent à la surface.

Considérons maintenant une normalie ayant pour directrice une géodésique, la génératrice de la normalie sera la normale principale de la géodésique considérée; nous serons alors en présence d'une surface gauche lieu des normales principales d'une courbe. Donc (p. 266) *la géodésique directrice de la normalie sera une asymptotique de cette normalie.*

Le λ du point central compté à partir de la surface proposée sera donné (p. 267) par la formule

$$\lambda = \frac{T^2 \rho}{\rho^2 + T^2},$$

T et ρ désignant la torsion et la courbure de la géodésique directrice considérée.

XIV. — Théorème de Dupin.

Par un point M d'une surface faisons passer trois axes rectangulaires, à savoir la normale à la surface qui sera axe des z et deux axes tangents aux lignes coordonnées passant en M; soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les neuf cosinus servant à passer de ces axes aux axes de coordonnées.

Par chaque point M imaginons une droite ayant pour longitude et colatitude par rapport aux axes passant en M les

angles ψ et θ; les cosinus directeurs de cette droite seront

$$a \sin\theta \cos\psi + a' \sin\theta \sin\psi + a'' \cos\theta = \alpha,$$
$$b \sin\theta \cos\psi + b' \sin\theta \sin\psi + b'' \cos\theta = \beta,$$
$$c \sin\theta \cos\psi + c' \sin\theta \sin\psi + c'' \cos\theta = \gamma.$$

Pour que cette droite dans toutes ses positions soit normale à une même surface, il faut et il suffit que, en appelant x, y, z les coordonnées du point M, l'expression

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

soit une différentielle exacte; or, en supposant le ds de la surface mis sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{L}\, d\lambda^2 + \mathrm{M}\, d\mu^2,$$

on a

$$dx = a\sqrt{\mathrm{L}}\, d\lambda + a'\sqrt{\mathrm{M}}\, d\mu,$$
$$dy = b\sqrt{\mathrm{L}}\, d\lambda + b'\sqrt{\mathrm{M}}\, d\mu,$$
$$dz = c\sqrt{\mathrm{L}}\, d\lambda + c'\sqrt{\mathrm{M}}\, d\mu.$$

L'expression $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ devient alors

$$\sqrt{\mathrm{L}} \sin\theta \cos\psi\, d\lambda + \sqrt{\mathrm{M}} \sin\theta \sin\psi\, d\mu,$$

et, pour que la surface normale existe, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mathrm{L}} \sin\theta \cos\psi\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\mathrm{M}} \sin\theta \sin\psi\right).$$

Cette relation ne dépend que de L et M; donc, si l'on déforme la surface M en conservant les directrices ψ, θ de manière qu'elles restent applicables sur elles-mêmes, les droites ψ, θ resteront normales à une même surface.

Maintenant changeons $\sin\theta$ en $k \sin\theta$, k désignant un coefficient constant, il est clair que la relation (1) subsistera; mais on peut alors supposer que les droites ψ, θ sont des rayons lumineux, que la surface lieu des points M est une surface

de séparation de deux milieux, l'indice de réfraction étant k. On peut donc dire que :

Si des rayons lumineux sont normaux à une même surface, ils restent normaux à une même surface après s'être réfléchis ou réfractés sur une même surface séparant deux milieux.

Ce théorème est de Dupin; la démonstration précédente est de Laguerre.

La formule (1) met encore ce fait en évidence :

Les tangentes à un système de géodésiques d'une même surface sont normales à une même surface.

En effet, supposons que $\lambda =$ const. soient des géodésiques, $\sqrt{M}$ sera fonction de μ seul, on aura $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, et par suite l'équation (1) se réduira à $0 = 0$.

XV. — Congruences isotropes.

Soit D une droite d'une congruence et S une surface de référence quelconque; menons à S un plan tangent perpendiculaire à D, il touchera cette surface en un point où nous placerons l'origine d'axes instantanés rectangulaires; nous supposerons les axes des ξ et des η tangents aux lignes de courbure de la surface S : l'axe des ζ sera naturellement dirigé suivant la normale; ξ, η, ζ désigneront alors les coordonnées d'un point A quelconque de la droite D.

Les projections du, dv du déplacement du point A sur les axes instantanés sont données par les formules (p. 175), où l'on fait $r = 0$,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} du &= A\,d\lambda + B\,d\mu + C\,\zeta\,d\lambda,\\ dv &= A'd\lambda + B'd\mu + C'\zeta\,d\mu;\end{aligned}\right.$$

dans ces formules,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
A &= \sqrt{L} + \frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + \frac{\eta}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial\mu},\\
B &= \frac{\partial\xi}{\partial\mu} - \frac{\eta}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial\lambda},\\
A' &= \frac{\partial\eta}{\partial\lambda} - \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial\mu},\\
B' &= \sqrt{M} + \frac{\partial\eta}{\partial\mu} + \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial\lambda},\\
C &= -\frac{l}{L\sqrt{M}},\\
C' &= -\frac{m}{M\sqrt{L}}.
\end{aligned}\right.$$

Commençons par chercher les foyers et les plans focaux; à cet effet, nous emploierons l'artifice suivant : considérons une surface élémentaire passant par D; appelons ω l'angle que le plan tangent à cette surface fait avec le plan des $\zeta\xi$ le long de la droite D, on aura

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{dv}{du} = \frac{A'\,d\lambda + B'\,d\mu + C'\zeta\,d\mu}{A\,d\lambda + B\,d\mu + C\,\zeta\,d\lambda}.$$

Si nous observons que toutes les surfaces élémentaires ont (p. 294) même plan tangent au foyer, nous obtiendrons les ζ des foyers en exprimant que $\operatorname{tang}\omega$ ne dépend pas du rapport $d\lambda : d\mu$, ce qui donne

$$\frac{A'}{A + C\zeta} = \frac{B' + C'\zeta}{B}$$

ou, en appelant Z l'ordonnée ζ du foyer donnée par cette équation,

$$(4)\qquad CC'Z^2 + Z(AC' + CB') + AB' - BA' = 0;$$

d'ailleurs la formule (3) donnera, pour l'angle ω que fait un plan focal avec le plan des $\xi\zeta$,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{A'}{A + CZ} = \frac{B' + C'Z}{B};$$

l'élimination de Z donne

$$BC \operatorname{tang}^2\omega - \operatorname{tang}\omega(B'C - AC') - A'C' = 0.$$

On voit que, en appelant Z_1 et Z_2 les ζ des foyers, ω_1 et ω_2 les angles que les plans focaux font avec le plan des $\zeta\xi$, on aura

$$Z_1 Z_2 = \frac{AB' - BA'}{CC'}, \qquad \operatorname{tang}\omega_1 \operatorname{tang}\omega_2 = -\frac{A'C'}{BC}.$$

On appelle *congruences isotropes* celles dont les plans focaux sont isotropes; pour que la congruence que nous considérons soit isotrope, il faut que l'on ait $\operatorname{tang}^2\omega + 1 = 0$: il faut donc que

$$(5) \qquad B'C - AC' = 0, \qquad BC + A'C' = 0.$$

Nous allons maintenant particulariser la surface de référence : nous supposerons que cette surface soit la sphère

$$(6) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et que la droite D soit dans le plan des $\zeta\xi$, alors $\eta = 0$. En différentiant (6) deux fois, on a

$$(7) \qquad \sum x \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0,$$

$$(8) \qquad \sum x \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 = 0;$$

mais on a aussi

$$(9) \qquad \sum x \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0.$$

De (6), (7) et (9) on tire (p. 88)

$$\frac{x}{\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\dfrac{\partial z}{\partial \mu} - \dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\dfrac{\partial y}{\partial \mu}} = \ldots = \frac{a}{\sqrt{LM}},$$

et (8), par l'élimination de x, y, z, donne

$$\frac{al}{\sqrt{LM}} + L = 0$$

ou

$$l = -\frac{L\sqrt{LM}}{a}, \qquad m = -\frac{M\sqrt{LM}}{a};$$

de sorte que, en remplaçant A, B, ... par leurs valeurs (2), les équations (5) deviennent

$$\left(\sqrt{M} + \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)\sqrt{L} - \left(\sqrt{L} + \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\right)\sqrt{M} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mu}\sqrt{L} - \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial \mu}\sqrt{m} = 0$$

et, en simplifiant,

$$\frac{\xi}{2M}\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\xi}{2L}\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial \xi}{\partial \mu}.$$

Ces deux équations donnent, en intégrant,

$$\xi = \sqrt{M} = \sqrt{L}.$$

Il en résulte :

1° Que les lignes coordonnées sur la sphère sont telles que le ds y est de la forme

$$ds^2 = \Lambda(d\lambda^2 + d\mu^2),$$

et le réseau des lignes coordonnées est isométrique;

2° Que, *pour avoir une congruence isotrope, il suffit de tracer sur une sphère un réseau isométrique, de mener des tangentes à chaque ligne coordonnée, de prendre à partir du point de contact sur cette tangente une longueur égale à* Λ *et de mener par l'extrémité du segment ainsi formé une parallèle au rayon de la sphère qui passe par son origine; les parallèles en question forment une congruence isotrope.*

La recherche des congruences isotropes est ainsi ramenée à celle des réseaux isométriques sur la sphère.

Ce beau théorème est de M. Ribaucour (*Étude sur les élassoïdes*, 1881, Mémoire couronné par l'Académie de Bruxelles).

Prenons maintenant pour surface de référence l'enveloppée moyenne de la congruence que nous supposons toujours isotrope, nous aurons, comme plus haut,

$$B'C - AC' = 0, \qquad BC + A'C' = 0,$$

et, comme les ζ des foyers de la droite D doivent être égaux et de signes contraires, en appelant Z l'un d'eux, on devra avoir

$$AC' + CB' = 0, \qquad Z^2 = \frac{AB' - BA'}{CC'}.$$

Or C et C' ne peuvent pas être nuls, sans quoi les lignes coordonnées seraient des asymptotiques (l et m sont nuls avec C et C'); il faut donc, pour que les équations précédentes aient lieu, que

$$A = 0, \qquad B' = 0, \qquad BC + A'C' = 0,$$

$$Z^2 = -\frac{B}{C'}\frac{A'}{C} = \frac{B^2}{C'^2} = \frac{A'^2}{C^2}$$

ou

$$Z = \pm\frac{B}{C'} = \mp\frac{A'}{C}.$$

Ces équations, en vertu de (2), reviennent aux suivantes :

(10) $$\frac{\partial\xi}{\partial\lambda} = -\sqrt{L} - \frac{\eta}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial\mu},$$

(11) $$\frac{\partial\eta}{\partial\mu} = -\sqrt{M} - \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial\lambda},$$

(12) $$\frac{\partial\xi}{\partial\mu} = \frac{\eta}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial M}{\partial\lambda} - \frac{mZ}{M\sqrt{L}},$$

(13) $$\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} = \frac{\xi}{2\sqrt{LM}}\frac{\partial L}{\partial\mu} + \frac{lZ}{L\sqrt{M}}.$$

Si l'on différentie (10) par rapport à μ et que l'on remplace $\frac{\partial\eta}{\partial\mu}$ par sa valeur (11), si l'on différentie (12) par rapport à λ en remplaçant $\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}$ par sa valeur (13), si enfin on retranche les résultats l'un de l'autre, on aura, en ayant égard aux formules ((12)) de M. Codazzi (p. 174),

$$\eta = \frac{L\sqrt{M}}{l}\frac{\partial Z}{\partial\lambda};$$

on trouve d'une manière semblable

$$\xi = -\frac{M\sqrt{L}}{m}\frac{\partial Z}{\partial\mu}.$$

Si l'on remplace ξ et η par ces valeurs dans (10) et (12), on trouve, en faisant usage des formules ((12)) de M. Codazzi (p. 174),

$$\frac{l}{L} + \frac{m}{M} = 0;$$

ce qui exprime que la courbure moyenne de la surface de référence est nulle (p. 100); donc :

L'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope est un élassoïde ou alysséïde.

Ce théorème est de M. Ribaucour (*loc. cit.*).

La recherche des élassoïdes se ramène donc à la recherche des réseaux isométriques sur la sphère.

XVI. — Retour à la méthode de Plücker.

Appelons u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'une droite mobile; ce seront, si l'on veut, les quantités a, b, p, q qui entrent dans les équations

(1) $$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

de cette droite, ou des fonctions de ces quantités; une équa-

tion entre u_1, u_2, u_3, u_4 définira un complexe, deux équations entre ces mêmes quantités définiront une congruence, trois équations définiront une surface réglée. Dans l'un ou l'autre de ces trois cas, si l'on considère une droite infiniment voisine de la droite (1),

$$(2)\quad x = (a + da)z + p + dp, \qquad y = (b + db)z + q + dq,$$

et si l'on appelle δ la plus courte distance de ces deux droites, dV leur angle, on aura

$$\delta\, dV = \frac{da\, dq - db\, dp}{a^2 + b^2 + 1},$$

et cette quantité est ce que l'on peut appeler le *moment élémentaire* de la droite (1). Si l'on prend pour variables u_1, u_2, u_3, u_4, ce moment prend la forme quadratique

$$\sum U_{ij}\, du_i\, du_j$$

ou les U_{ij} sont des fonctions des u.

Surfaces gauches.

Soient maintenant

$$(3)\qquad P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

trois équations en u_1, u_2, u_3, u_4, elles représenteront une surface réglée; si nous égalons à zéro le moment élémentaire, l'équation ainsi obtenue

$$(4)\qquad \sum U_{ij}\, du_i\, du_j = 0$$

exprimera que la génératrice pour laquelle cette équation est satisfaite rencontre la génératrice voisine ou lui est parallèle; or, en posant

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial u_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial Q}{\partial u_i}, \qquad R_i = \frac{\partial R}{\partial u_i},$$

on a

$$(5) \qquad \sum P_i du_i = 0, \qquad \sum Q_i du_i = 0, \qquad \sum R_i du_i = 0.$$

Si entre (4) et (5) on élimine les du, on trouve

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & P_1 & Q_1 & R_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & P_2 & Q_2 & R_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & P_3 & Q_3 & R_3 \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & P_4 & Q_4 & R_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(6) \qquad G = 0,$$

en désignant par G le premier membre de l'équation précédente. L'équation $G = 0$, jointe aux équations (3), déterminera les u des génératrices parallèles aux génératrices voisines ou rencontrant celles-ci; les génératrices jouissant de cette propriété sont dites *singulières,* mais l'équation $G = 0$ peut encore être satisfaite pour les génératrices annulant les déterminants $\frac{\partial(P, Q, R)}{\partial(u_i, u_j, u_k)}$ que nous considérerons également comme singulières. Lorsque toutes les génératrices sont singulières, la surface est développable; ainsi, quand on a

$$G = 0,$$

identiquement la surface (3) est développable; cette équation peut donc être considérée comme celle des développables.

XVII. — Congruences.

Deux équations en u_1, u_2, u_3, u_4

$$(7) \qquad P = 0, \qquad Q = 0$$

représentent une congruence, et si l'on égale à zéro le

moment élémentaire, on obtient une équation

$$(8)\qquad \sum U_{ij}\, du_i\, du_j = 0,$$

qui définit les directions $du_1 : du_2 : du_3 : du_4$, dans lesquelles il faut se déplacer pour trouver une génératrice située dans le même plan que la génératrice u_1, u_2, u_3, u_4. Pour achever de déterminer les rapports en question, il faut adjoindre à (8) les équations

$$(9)\qquad \sum P_i\, du_i = 0, \qquad \sum Q_i\, du_i = 0;$$

ces équations (8) et (9) font connaître deux systèmes de valeurs des rapports $du_1 : du_2 : du_3 : du_4$. Pour obtenir les développables du faisceau, il faut chercher l'équation $R = 0$ à adjoindre aux équations (7) pour représenter ces développables; on l'obtiendra donc en égalant à zéro le déterminant G considéré au paragraphe précédent. L'équation

$$G = 0$$

est une équation en R aux dérivées partielles du premier ordre; l'intégrale générale représente les développables du faisceau (p. 320). Il y a aussi une intégrale singulière qui représente l'enveloppe des développables en question, c'est-à-dire la surface focale.

Nous avons fait observer que les équations (8), (9) avaient deux solutions. Si l'on exprime que ces solutions sont confondues, on obtiendra la condition pour que les deux foyers de la génératrice u_1, u_2, u_3, u_4 soient confondus. Pour exprimer que (8), (9) ont une solution double, il faut éliminer les du entre (8), (9) et le déterminant fonctionnel de leurs premiers membres égalé à zéro; au lieu d'égaler ce déterminant à zéro, on peut introduire deux nouvelles variables $d\lambda$, $d\mu$ et écrire qu'il existe une même relation linéaire entre les éléments d'une même colonne, ce qui fournit les nouvelles

équations

$$(10)\quad \begin{cases} U_{11}\,du_1 + U_{12}\,du_2 + U_{13}\,du_3 + U_{14}\,du_4 + P_1\,d\lambda + Q_1\,d\mu = 0, \\ U_{21}\,du_1 + U_{22}\,du_2 + U_{23}\,du_3 + U_{24}\,du_4 + P_2\,d\lambda + Q_2\,d\mu = 0, \\ U_{31}\,du_1 + U_{32}\,du_2 + U_{33}\,du_3 + U_{34}\,du_4 + P_3\,d\lambda + Q_3\,d\mu = 0. \end{cases}$$

Or, de (8) et (9), on tire

$$(11)\quad 2\sum U_{ij}\,du_i\,du_j + d\lambda\sum P_i\,du_i + d\mu\sum Q_i\,du_i = 0;$$

ajoutant alors les équations (10) après les avoir multipliées par du_1, du_2, du_3 et retranchant le résultat de (11), on trouve

$$(12)\quad U_{41}\,du_1 + U_{42}\,du_2 + U_{43}\,du_3 + U_{44}\,du_4 + P_4\,d\lambda + Q_4\,d\mu = 0.$$

De (11), (12) et (9) on tire, en posant

$$H = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & P_1 & Q_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & P_2 & Q_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & P_3 & Q_3 \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & P_4 & Q_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

l'équation

$$(13)\quad H = 0,$$

laquelle exprime que les foyers sont confondus. Si $H = 0$ est une identité, les deux surfaces focales de la congruence sont confondues et l'équation $H = 0$ définit un genre particulier de congruences, dans lesquelles les génératrices rencontrent la surface focale en trois points confondus et par conséquent ont avec la focale un contact du second ordre; la congruence est donc formée des asymptotes de l'indicatrice d'une même surface (t. II, p. 464) ou des tangentes aux asymptotiques d'une même surface.

XVIII. — Complexes.

Une seule équation

$$P = 0$$

entre les coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 représente un complexe; l'équation $H = 0$, considérée tout à l'heure, définit une fonction Q telle que l'équation $Q = 0$ jointe à $P = 0$ détermine dans le complexe un lieu de droites qui sont les tangentes inflexionnelles d'une surface. Q est déterminé par une équation $H = 0$ aux dérivées partielles du premier ordre, dont on a immédiatement une intégrale complète et par suite l'intégrale générale; il y aura donc une infinité de surfaces ayant leurs tangentes inflexionnelles parmi les droites du complexe.

Cherchons la condition pour que les droites d'un complexe soient tangentes à une même surface

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Soit

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

une droite du complexe; pour que cette droite touche la surface, il faut que l'équation

$$z = f(az + p, bz + q) \tag{2}$$

ait une solution double, c'est-à-dire que l'on ait en même temps

$$1 = af_1(az + p, bz + q) + bf_2(az + p, bz + q), \tag{3}$$

formule où $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$. Éliminons la fonction f; à cet effet, différentions (2) en tenant compte de (3), nous aurons

$$0 = f_1(z\,da + dp) + f_2(z\,db + dq);$$

cette équation se décompose en

$$0 = f_2 \frac{\partial q}{\partial a} + z f_1,$$

$$0 = f_2 \left(z + \frac{\partial q}{\partial b} \right),$$

$$0 = f_2 \frac{\partial q}{\partial p} + f_1,$$

et en éliminant f_1, f_2 et z entre ces équations et (3), on a

$$\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial q}{\partial b} \frac{\partial q}{\partial p} = 0. \tag{4}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles qui exprime que les droites du complexe touchent une même surface. Cette équation prend la forme

$$\frac{\partial P}{\partial a} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial b} \frac{\partial P}{\partial p} = 0; \tag{5}$$

quand on suppose a, b, p, q liés entre eux par une équation

$$P(a, b, p, q) = 0,$$

l'équation (5) s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la fonction du second degré

$$da\, dq - db\, dp + d\lambda\, dP$$

relativement aux variables da, db, dp, dq, $d\lambda$, comme il est bien facile de s'en assurer en écrivant ce discriminant et en le développant. Si alors on change de variables et si à la place de a, b, p, q on prend des variables quelconques, cette expression deviendra

$$\sum U_{ij}\, du_i\, du_j + d\lambda\, dP,$$

or le nouveau discriminant est égal à l'ancien à un facteur

près; la condition (5) se transforme donc dans la suivante :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & P_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & P_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & P_3 \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & P_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais revenons à l'équation (5) : c'est la résultante des équations

$$\frac{da}{\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)} = -\frac{db}{\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)} = -\frac{dp}{\left(\frac{\partial P}{\partial b}\right)} = \frac{dq}{\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)} = d\lambda,$$

d'où l'on tire

$$d\lambda = \frac{da\,dq - dp\,db}{\frac{\partial P}{\partial a}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial b}\frac{\partial P}{\partial p}}.$$

L'équation (5) exprime donc que $da\,dq - dp\,db$ ou la plus courte distance de deux génératrices voisines est nulle; l'équation (6) conduirait aux mêmes conclusions. Si les formules (5) et (6) n'ont lieu que pour certaines génératrices, celles-ci seront appelées *singulières*.

Lorsque les droites d'un complexe sont tangentes à une même surface, on peut trouver cette surface comme il suit :

Soient dx, dy, dz les composantes d'un déplacement effectué sur la surface au point x, y, z, on devra avoir

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \qquad P = 0.$$

L'élimination de a, b, p, q entre ces équations fournira une équation entre dx, dy, dz, de la forme

$$\psi(dx,\ dy,\ dz,\ z\,dy - y\,dz,\ z\,dx - x\,dz) = 0,$$

homogène par rapport à dx, dy, dz, $z\,dy - y\,dz$, $z\,dx - x\,dz$, ou plus exactement

$$P\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{z\,dy - y\,dz}{dz}, \frac{z\,dx - x\,dz}{dz}\right) = 0.$$

Si la surface tangente au complexe existe, on devra pouvoir tirer dz de là en fonction linéaire de dx et dy, et z sera fourni par une équation aux différentielles totales; la solution renfermera une constante arbitraire que l'on déterminera en exprimant que les droites du complexe sont bien tangentes à la surface trouvée.

Si, par exemple, on suppose

$$P = (ap + bq)^2 - (a^2 + b^2 + 1)(p^2 + q^2 - 1),$$

l'équation $\psi = 0$ se réduit à

$$(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = 0,$$

d'où l'on tire $x^2 + y^2 + z^2 =$ const., et, pour satisfaire à la question, il faut prendre la constante égale à un.

L'équation (6) a, je crois, été trouvée par M. Kœnigs; elle se trouve démontrée dans sa Thèse.

Toutes les droites d'une congruence sont tangentes à deux surfaces; par conséquent on peut les considérer comme appartenant à deux complexes formés des droites tangentes à une même surface. Donc :

Toute congruence peut être représentée par deux équations $L = 0$, $M = 0$ *représentant deux complexes de droites tangentes à une même surface.*

Parmi les droites d'un complexe, on peut toujours trouver des congruences normales à une même surface.

En effet, si nous considérons une droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

et si nous exprimons qu'elle est normale à la surface décrite

par le point x, y, z, il faudra que

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0;$$

or les équations de la droite différentiées donnent

$$dx = a\,dz + z\,da + dp, \qquad dy = b\,dz + z\,db + dq,$$

et en portant ces valeurs de dx et dy dans l'équation précédente

$$dz(a^2 + b^2 + 1) + a\,dp + b\,dq = 0.$$

Si l'on suppose que la droite engendre une congruence, pour que la surface normale existe, il faut que la valeur de dz, tirée de là, soit une différentielle exacte, ou que

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{a}{a^2 + b^2 + 1} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{b}{a^2 + b^2 + 1} = 0,$$

ou que

$$(a^2 + b^2 + 1)\left(\frac{\partial a}{\partial q} - \frac{\partial b}{\partial p}\right) = a\left(\frac{\partial a}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial p}\right) + b\left(\frac{\partial b}{\partial q} - \frac{\partial b}{\partial p}\right).$$

Supposons les équations de la congruence de la forme

$$P = 0, \qquad Q = 0;$$

en introduisant dans l'équation précédente, à la place de $\frac{\partial a}{\partial q}$, $\frac{\partial b}{\partial q}$, $\frac{\partial a}{\partial p}$, $\frac{\partial b}{\partial p}$, les dérivées partielles de P et Q, on a

$$(a^2 + b^2 + 1)\left[\frac{\partial(P, Q)}{\partial(a, p)} - \frac{\partial(P, Q)}{\partial(b, q)}\right]$$
$$= a\left[\frac{\partial(P, Q)}{\partial(b, p)} - \frac{\partial(P, Q)}{\partial(b, q)}\right] + b\left[\frac{\partial(P, Q)}{\partial(a, p)} - \frac{\partial(P, Q)}{\partial(a, q)}\right].$$

Si l'on considère alors un complexe $P = 0$, cette équation fera connaître l'équation $Q = 0$ du complexe qui déterminera dans celui-ci une congruence de droites normales à une même surface. On voit qu'il existera une infinité de faisceaux normaux à une même surface parmi les droites d'un complexe.

XIX. — Application de la théorie des complexes à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Soit $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ les dérivées de la fonction z par rapport à x et y, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

peut être considérée comme l'équation d'un complexe, pourvu que l'on y joigne l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{2}$$

En effet, on peut regarder x, y, z comme les coordonnées d'un point de l'espace, et p, q, -1 comme les coefficients directeurs d'un plan passant par ce point; à chaque point x, y, z correspondront une infinité de plans

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \tag{3}$$

qui, en vertu de (1), envelopperont un cône; les génératrices de ce cône, quand on fera varier x, y, z, engendreront un complexe. Pour avoir une génératrice du cône en question, il faudra chercher la caractéristique du plan (3) et pour cela différentier son équation en laissant x, y, z constants, ce qui donnera

$$dp(X - x) + dq(Y - y) = 0; \tag{4}$$

d'ailleurs dp et dq s'obtiendront en différentiant (1), en laissant aussi x, y, z constants, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial p}\,dp + \frac{\partial f}{\partial q}\,dq = 0. \tag{5}$$

En éliminant dp et dq de (3), (4), (5), on déduit les équa-

tions d'une droite du complexe

$$(6)\qquad \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{Z-z}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}},$$

dans lesquelles x, y, z, p, q sont liés non seulement par la relation (1), mais encore par la relation finie que l'on suppose exister entre x, y, z en vertu de la relation (2). Nous sommes en présence du complexe des tangentes à une même surface, et l'intégration de l'équation (1) revient à la recherche de cette surface.

Pour trouver la surface en question, cherchons d'abord une courbe tangente à une série de droites du complexe; il faudra pour cela exprimer que les composantes dx, dy, dz de l'élément de courbe sont proportionnelles aux coefficients directeurs d'une droite (6) du complexe et l'on aura

$$(7)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}};$$

ce sont les équations différentielles des courbes cherchées, et par chaque point x_0, y_0, z_0 passe une de ces courbes. Il est évident qu'un lieu de ces courbes sera une surface répondant à la question.

[Il est à remarquer que l'équation (2) $p\,dx + q\,dy = dz$ se déduit de (7), de sorte que si p et q étaient connus on en déduirait le lieu de nos courbes par une seule intégration]. Mais p et q étant inconnus, ces équations (7) ne peuvent suffire au calcul de x et y en fonction de z. Or, considérons les courbes conjuguées de celles que nous venons de trouver sur la surface cherchée; pour que deux déplacements δx, δy, δz et dx, dy, dz soient conjugués, on sait que l'on doit avoir

$$r\,\delta x\,dx + s(\delta x\,dx + \delta y\,dy) + t\,\delta y\,dy = 0$$

ou, si l'on veut,

$$(8) \qquad \delta p\, dx + \delta q\, dy = 0,$$

$$(9) \qquad \delta x\, dp + \delta y\, dq = 0;$$

mais on a, en différentiant (1),

$$(10) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta y + \frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q = 0.$$

Or (8), en vertu de (7) donne,

$$\frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q = 0;$$

(10) se réduit alors à

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta y = 0$$

ou, en vertu de (9), à

$$(11) \qquad \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{dp} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}}{dq};$$

cette équation, jointe à (1) et à (7), déterminera les courbes cherchées, en vertu de l'équation obtenue en différentiant (1), à savoir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq = 0;$$

le système (7), (11) peut s'écrire

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial p}} = -\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial q}}.$$

Ces équations font connaître p, q et les équations des courbes cherchées. En effet, supposons-les intégrées et soient

$$\varphi_1(x, y, z, x_0, y_0, z_0, p, q, p_0, q_0) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

leurs quatre intégrales, obtenues en faisant intervenir l'équa-

tion (1); l'élimination de p et q fournira les courbes cherchées sous la forme

$$\theta(x, y, z, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$
$$\theta_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Si entre ces équations et

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

on élimine p_0 et q_0, on aura une solution de la question; c'est la solution complète, il est clair qu'on en aura une autre en posant $z_0 = \varpi(y_0)$ et $q_0 = \frac{\partial\varpi}{\partial q_0}$ et en éliminant toutes les constantes.

XX. — Note historique sur la théorie des droites.

La théorie des congruences a été créée par Monge, qui a fait connaître leur propriété fondamentale (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1781) et la théorie des normales à une même surface (*Application d'Analyse et de Géométrie, Théorie des déblais et des remblais*). La théorie des complexes a été créée par Malus en 1807. Voici la liste des travaux que l'on peut consulter sur la théorie des droites.

Hamilton [*Theory of systems of rays* (*Irish Acad. Transactions,* t. XV, XVI, XVII)]; Kummer (*Nouv. Annales de Mathém.,* 1860-61-62); Plücker (*Neue Geometrie des Raumes,* Leipzig, 1869); Klein (*Math. Annalen,* t. II et V); Picard (Thèse); Kœnigs (Thèse, 1882); Ribaucour (Mémoire couronné par l'Académie de Belgique, déjà cité); Genty [Mémoire où la théorie des complexes est établie à l'aide du Calcul des quaternions (*Journal de Mathém. pures et appliquées,* t. VIII, 3e série, 1882)]; Léauté (Thèse).

EXERCICES ET NOTES.

1. Deux équations de la forme suivante où a, b sont des paramètres arbitraires

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \psi(x, y, z, a, b) = 0$$

représentent une *congruence* de courbes.

2. Les courbes d'une congruence peuvent être associées de manière à former des surfaces passant par une même courbe (c); il existe sur (c) un certain nombre de points pour lesquels les surfaces en question ont le même plan tangent. Ces points sont dits points *focaux*. Le lieu des points focaux est la *surface focale*.

3. Si l'on assemble les courbes d'une congruence de manière qu'elles aient une enveloppe, cette enveloppe fera partie de la surface focale.

4. Les courbes d'une congruence touchent la surface focale.

Conclusion.

Je crois devoir terminer ici ce que j'appellerai la partie didactique de l'Analyse.

Qu'il me soit permis maintenant de remercier M. Courcelles, qui a bien voulu me prêter son gracieux concours pour la correction des épreuves des derniers Volumes, et surtout MM. Gauthier-Villars, sans l'aide desquels je n'aurais jamais pu mener à bonne fin la publication de mon Travail.

FIN DU TOME SEPTIÈME ET DERNIER.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME VII.

CHAPITRE I.

Étude des courbes que l'on peut tracer sur une surface donnée.

CHAPITRE II.

Géométrie sphérique.

CHAPITRE III.

Des coordonnées curvilignes sur une surface.

CHAPITRE IV.

Des coordonnées curvilignes dans l'espace.

CHAPITRE V.

Théorie des surfaces gauches.

CHAPITRE VI.

La géométrie des lignes droites.

FIN DE LA TABLE DU TOME SEPTIÈME.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
8	5	$(Y-y)\,dy$	$(Y-y)\,dq$
12	16	$pq\,dz$	$pq\,dx$
14	15	dx	dy
15	16-18	$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_{11}dx + f_{12} & dy + f_{13}dz & \ldots \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_{11}dx + f_{12}dy + f_{13}dz & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$
20	25, 27	$(x_2 + y_2)$	$4(x_2 + y_2)$
20	29	$-\sqrt{c-(x^2+y^2)}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{c-(x^2+y^2)}$
21	2	c	$\frac{c}{4}$
21	11	(p. 17)	(p. 15)
37	16	$\frac{1}{g}$	$-\frac{1}{g}$
37	26	$N(1-p^2)$	$N(1+p^2)$
38	8	$\left[\frac{\lambda' d\lambda'}{\sqrt{\quad}} - \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\quad}}\right]$	$\left[\frac{\lambda' d\lambda'}{\sqrt{\quad}} + \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\quad}}\right]$
41	11	$1 = x + \ldots$	$0 = x + \ldots$
59	24	M	m
101	9, 10	$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$	$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}$
102	13, 18	$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial R}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \lambda}$
102	14, 19	$\frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \mu}$	$\frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \mu}$
119	5	$\psi(\mu)$	$\psi'(\mu)$
121	9	$=\int \frac{dk\ldots}{\sqrt{\quad}}$	$=-\int \frac{dk\ldots}{\sqrt{\quad}}$
124	9	$\frac{1-\nu^2}{2}$	$\frac{1-\upsilon^2}{2}$
133	25	(p. 101)	(p. 100)
148	10	$M'\psi'^2$	$M'\psi^2$
168	16	c''	c
173	7	$\frac{1}{L\sqrt{M}}$	$\frac{-1}{L\sqrt{M}}$

ges.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
85	14	$\sqrt{\frac{B}{BC}}$	$\sqrt{\frac{B}{AC}}$
99	31	$v = \text{const.}$	$\nu = \text{const.}$
07	17	$\rho_{\lambda\nu}\rho_{\mu\lambda}\rho_{\lambda\nu}+\ldots$	$\rho_{\lambda\nu}\rho_{\mu\lambda}\rho_{\nu\mu}+\ldots$
18	19, 20	$(\lambda)\left\{\right.$	$(\gamma)\left\{\right.$
115	7	$-b^2\cos^2 i'^2 - b^2\sin^2 i'^2$	$-b^2\cos^2 i - b^2\sin^2 i$
120	6	$2k'^2 z$	$2kz$
123	20	cercle	centre
133	5	z	2 (2 fois)
133	10	(b^2+c^2)	(b^2-c^2)
133	12	$(b^4-c^4)a^2\lambda$	$(b^4-c^4)a^2(\lambda-\mu)\lambda$
133	13	$\lambda\mu\left[\cdots\right]^2(\mu-\lambda)^2$	$\left[\cdots\right]^2(\mu-\lambda)^2$
133	16	$\lambda\mu\, d\lambda\, d\mu\ldots$	$d\lambda\, d\mu\ldots$
134	2	$d\lambda\, d\mu$	$d\lambda\, d\mu(\mu-\lambda)$
141	23	ou	où
142	11	au plan central O.	au point central O.
153	23	(p. 44)	(p. 145)
182	23	$D(\zeta'-\xi)$	$D(\xi'-\xi)$
196	21	$dy\, dz$	$d\gamma\, dz$

15932 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.